

CONCOURS XENS 2025
MATHÉMATIQUES A - MP

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

I. Questions préliminaires

1. Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable. Puisque W est stable par h , $h|_W$ est un endomorphisme de W .

On utilise le théorème suivant:

Théorème. Soit $h \in \mathcal{L}(V)$. L'endomorphisme h est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ ayant toutes ses racines simples tel que $P(h) = 0$.

Soit P un tel polynôme annulant h . Il annule donc aussi l'endomorphisme $h|_W$, qui est donc diagonalisable d'après l'implication réciproque.

2. Un invariant matriciel.

2a. Si M et M' sont semblables, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M' = P^{-1}MP$. Mais alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M'^k = P^{-1}M^kP$$

Les matrices M'^k et M^k sont donc semblables. Elles ont même rang et les dimensions de leurs noyaux sont identiques. Ce qui implique directement que

$$\delta_k(M) = \delta_k(M')$$

2b. Soit $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$. La matrice J_r^k possède des 1 sur la k ème diagonale inférieure i.e.

$$(J_r^k)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (X_1, X_2) &\mapsto \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Soit

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}X \in \ker M &\Leftrightarrow MX = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_1 X_1 \\ M_2 X_2 \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow X_1 \in \ker M_1 \wedge X_2 \in \ker M_2 \\ &\Leftrightarrow X \in \varphi(\ker M_1 \times \{0\}) \oplus \varphi(\{0\} \times \ker M_2)\end{aligned}$$

On a donc

$$\ker M = \varphi(\ker M_1 \times \{0\}) \oplus \varphi(\{0\} \times \ker M_2)$$

par suite,

$$\dim \ker M = \dim \varphi(\ker M_1 \times \{0\}) + \dim \varphi(\{0\} \times \ker M_2)$$

Or

$$\begin{aligned}\varphi(\ker M_1 \times \{0\}) &\cong \ker M_1 \\ \varphi(\{0\} \times \ker M_2) &\cong \ker M_2\end{aligned}$$

On peut donc conclure

$$\dim \ker M = \dim \ker M_1 + \dim \ker M_2$$

Alternativement, on peut remarquer que $\text{rang}(M) = \text{rang}(M_1) + \text{rang}(M_2)$ en interprétant le rang d'une matrice comme la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. Ce qui redonne l'égalité

$$\begin{aligned}n - \dim \ker M &= m - \dim \ker M_1 + l - \dim \ker M_2 \\ \Leftrightarrow \dim \ker M &= \dim \ker M_1 + \dim \ker M_2\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On remarque que

$$\begin{aligned}
M^k &= \text{diag}(M_1^k, M_2^k) \\
&= \left[\begin{array}{cc} \underbrace{\mathbf{M}_1^k}_{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{M}_2^k}_l \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathbf{M}_1^k \\ \mathbf{0} \end{array}} \right\} \text{taille } m \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_2^k \end{array}} \right\} \text{taille } l \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

En appliquant ce qui précède,

$$\dim \ker M^k = \dim \ker M_1^k + \dim \ker M_2^k$$

ce qui donne le résultat attendu

$$\delta_k(M) = \delta_k(M_1) + \delta_k(M_2)$$

II. Algèbre linéaire sur les polynômes de Laurent

3. L'application linéaire $\widehat{\xi}$ et l'endomorphisme ξ .

3a. Posons

$$F = \sum_{k=-p}^q f_k X^k \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}]$$

On a

$$XF = \sum_{k=-p+1}^{q+1} f_{k-1} X^k$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\xi}(\Pi(F)) &= \Pi(X\Pi(F)) \\
&= \Pi\left(\sum_{k=-p}^{-1} f_k X^{k+1}\right) \\
&= \Pi\left(\sum_{k=-p+1}^0 f_{k-1} X^k\right) \\
&= \sum_{k=-p+1}^{-1} f_{k-1} X^k \\
&= \Pi(XF) \\
\widehat{\xi}(\Pi(F)) &= \widehat{\xi}(F)
\end{aligned}$$

3b. Par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour $P = X^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Posons

$$F = \sum_{k=-p}^{-1} f_k X^k \in \mathcal{D}$$

donc

$$X^n F = \sum_{k=-p}^{-1} f_k X^{k+n} \in \mathcal{D}$$

Appliquer $\hat{\xi}$ consiste à multiplier par X puis tronquer les puissances de X positives. Un peu de réflexion montre alors que

$$\begin{aligned} \xi^n(F) &= \sum_{k=-p}^{-n-1} f_k X^{k+n} \\ &= \Pi(X^n F) \end{aligned} \tag{1}$$

Ce résultat se montre aussi par récurrence en utilisant la question précédente.

Ces égalités sont valables $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ en prenant la convention habituelle qu'une somme vide est nulle:

$$\sum_{k=i}^j u_k = 0 \text{ si } j < i$$

Généralisons à un polynôme quelconque $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$:

$$\begin{aligned} P(\xi)(F) &= \sum_{k=0}^n a_k \xi^k(F) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \Pi(X^k F) \\ &= \Pi(F \sum_{k=0}^n a_k X^k) \\ P(\xi)(F) &= \Pi(FP) \end{aligned}$$

4. Image et noyau des puissances de ξ . Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On a $\xi^n(X^{-j-n}) = X^{-j}$ ce qui montre que $\xi^n(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

Puis d'après l'égalité 1,

$$\begin{aligned} \xi^n(F) = 0 &\Leftrightarrow \Pi(X^n F) = 0 \\ &\Leftrightarrow X^n F \in \mathbb{C}[X] \\ &\Leftrightarrow F \in \text{vect}(X^{-j})_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \end{aligned}$$

$$\ker \xi^n = \text{vect}(X^{-j})_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

5. Sous-espaces cycliques. Soit $\tilde{\mathcal{D}}_r$ un sous espace stable par ξ contenant X^{-r} .

$$\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad X^{-r+k} = \xi^k(X^{-r})$$

ce qui montre que

$$\mathcal{D}_r = \text{vect}(X^{-j})_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket} \subset \tilde{\mathcal{D}}_r$$

De plus on a

$$\xi(\mathcal{D}_r) = \mathcal{D}_{r-1} = \text{vect}(X^{-j})_{j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket} \subset \mathcal{D}_r$$

avec la convention $\mathcal{D}_0 = \{0\}$.

Cela montre que $\mathcal{D}_r$ est le plus petit sous espace vectoriel de $\mathcal{D}$ stable par ξ contenant X^{-r} . La matrice de la restriction de ξ à $\mathcal{D}_r$ dans cette base est la matrice J_r .

III. Prolongements compatibles

6. Prolongement compatible avec u donné par un vecteur.

6a. $0 \in \mathcal{J}$ et

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{J}^2, \quad (P - Q)(u)(v) = P(u)(v) - Q(u)(v) \in W$$

montre que $(\mathcal{J}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}[X], +)$.

Soit $(P, Q) \in \mathcal{J} \times \mathbb{C}[X]$.

$$\begin{aligned} PQ(u)(v) &= QP(u)(v) \\ &= Q(u)(\underbrace{P(u)(v)}_{\in W}) \in W \end{aligned}$$

car W est stable par u et donc par $Q(u)$. Ainsi $PQ \in \mathcal{J}$.

$\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

6b. u étant nilpotent, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0$, ce qui signifie que $u^n(v) = 0 \in W$ et $X^n \in \mathcal{J}$.

Par ailleurs on sait que les idéaux de $\mathbb{C}[X]$ sont principaux, i.e.

$$\exists R \in \mathbb{C}[X], \quad \mathcal{J} = R\mathbb{C}[X]$$

On peut donc trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$X^n = RP$$

ce qui montre que R divise X^n et qu'il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que le monôme X^r engendre $\mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= X^r \mathbb{C}[X] \\ &= (X^r) \end{aligned}$$

6c. $W \subset W'$: il suffit de prendre choisir le polynôme nul pour P .

Soit $x = P(u)(v) + w \in W'$.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(P(u)(v)) + u(w) \\ &= (u \circ P(u))(v) + u(w) \\ &= XP(u)(v) + \underbrace{u(w)}_{\in W} \in W' \end{aligned}$$

On a bien $u(W') \subset W'$.

6d. On a $X^r \in \mathcal{J}$, autrement dit $u^r(v) \in W$ et cela a un sens de poser $G_v = \varphi(u^r(v))$.
 $G_v \in \mathcal{D}$ et d'après la question 4 l'endomorphisme $\xi^r \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ est surjectif donc

$$\exists F_v \in \mathcal{D}, \quad G_v = \xi^r(F_v)$$

6e. Il faut déjà remarquer que ¹

$$\begin{aligned} \varphi \circ u^2 &= \varphi \circ u \circ u \\ &= \xi \circ \varphi \circ u \\ &= \xi \circ \xi \circ \varphi \\ &= \xi^2 \circ \varphi \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne ensuite:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \xi^n \circ \varphi = \varphi \circ u^n \quad (2)$$

Puis par linéarité on obtient

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X], \quad Q(\xi) \circ \varphi = \varphi \circ Q(u)$$

$P(u)(v) = w \in W$ donc $P \in \mathcal{J}$ et donc $X^r | P$. Posons alors $P = X^r Q$, $Q \in \mathbb{C}[X]$.

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \varphi(P(u)(v)) \\ &= \varphi(QX^r(u)(v)) \\ &= \varphi((Q(u) \circ u^r)(v)) \\ &= \varphi \circ Q(u)(u^r(v)) \\ &= Q(\xi) \circ \varphi(u^r(v)) \\ &= Q(\xi)(G_v) \\ &= Q(\xi)(\xi^r(F_v)) \\ &= QX^r(\xi)(F_v) \\ \varphi(w) &= P(\xi)(F_v) \end{aligned}$$

¹Quand le contexte est clair, j'utilise la notation u pour $u_W = u|_W$.

6f. Posons $x = P(u)(v) + w = Q(u)(v) + w'$ où $(w, w') \in W^2$. On a alors:

$$(P - Q)(u)(v) = w' - w \in W$$

La question précédente donne

$$\begin{aligned} (P - Q)(\xi)(F_v) &= \varphi(w' - w) \\ \Leftrightarrow P(\xi)(F_v) + \varphi(w) &= Q(\xi)(F_v) + \varphi(w') \end{aligned}$$

montrant ainsi que définir l'application

$$\begin{aligned} \varphi' : W' &\rightarrow \mathcal{D} \\ x = P(u)(v) + w &\mapsto P(\xi)(F_v) + \varphi(w) \end{aligned}$$

a bien un sens puisque le choix de $P \in \mathbb{C}[X]$ et $w \in W$ dans la décomposition de x n'ont pas d'incidence sur la valeur de $\varphi'(x)$.

Il est clair que $\varphi'|_W = \varphi$: choisir $P = 0$.

$$\begin{aligned} \forall x = P(u)(v) + w \in W', \quad \xi \circ \varphi'(x) &= XP(\xi)(F_v) + \xi \circ \varphi(w) \\ &= XP(\xi)(F_v) + \varphi \circ u(w) \\ &= XP(\xi)(F_v) + \varphi(u(w)) \\ &= \varphi'(u \circ P(u)(v)) + u(w)) \\ &= \varphi'(u(P(u)(v) + w)) \\ &= \varphi'(u(x)) \\ &= \varphi' \circ u(x) \end{aligned}$$

ce qui finit de montrer que φ' est un prolongement à W' compatible avec u .

7. Prolongement à V compatible avec u . Dans la construction précédente, on remarque que $\dim W < \dim W'$: en effet $W \subset W'$ et $v \in W' \setminus W$. Si dès le départ $W = V$ c'est fini. Sinon on pose:

$$\begin{aligned} W &= W_0 \\ W' &= W_1 \\ \varphi &= \varphi_0 \\ \varphi' &= \varphi_1 \end{aligned}$$

et on réitère la construction précédente; supposons avoir construit une suite de sous espaces de V , strictement croissante pour l'inclusion

$$W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_n$$

et une suite de prolongement respectivement à chacun de ces sev compatibles avec u

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

Il y a alors deux alternatives:

- i $W_n = V$ et φ_n est prolongement à V compatible avec u .
- ii $W_n \subsetneq V$: on réitère comme dans la question 6 en construisant $W_n \subsetneq W_{n+1}$ et φ_{n+1} prolongement à W_{n+1} compatible avec u .

Ce processus a nécessairement une fin car sinon la suite $(\dim W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait une suite d'entiers naturels strictement croissante majorée par $\dim V$.

IV. Théorème de décomposition pour les endomorphismes nilpotents

8. Scindage d'un sous-espace cyclique maximal.

8a. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned}
 & \lambda_0 v_0 + \lambda_1 u(v_0) + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v_0) = 0 \\
 \Rightarrow & u^{n-1}(\lambda_0 v_0 + \lambda_1 u(v_0) + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(v_0)) = 0 \\
 \Rightarrow & \lambda_0 u^{n-1}(v_0) + \lambda_1 u^n(v_0) + \dots + \lambda_{n-1} u^{2(n-1)}(v_0) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lambda_0 u^{n-1}(v_0) = 0 \\
 \Rightarrow & \lambda_0 = 0 \quad (\text{car } u^{n-1}(v_0) \neq 0)
 \end{aligned}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Supposons $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \lambda_i = 0$.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(v_0) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i u^i(v_0) = 0 \\
 \Rightarrow & u^{n-k-2} \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i u^i(v_0) \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lambda_{k+1} u^{n-1}(v_0) + \sum_{i=k+2}^{n-1} \lambda_i \overbrace{u^{n+i-(k+2)}}^{\geq 0}(v_0) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lambda_{k+1} u^{n-1}(v_0) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lambda_{k+1} = 0 \quad (\text{car } u^{n-1}(v_0) \neq 0)
 \end{aligned}$$

Ce qui montre par récurrence que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_k = 0$$

i.e. la famille $(v_0, u(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0))$ est libre

De plus $v_0 \in W = \text{vect}(u^i(v_0))_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ et $u(W) = \text{vect}(u^i(v_0))_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket} \subset W$.

La matrice de l'endomorphisme induit $u|_W$ dans cette base est la matrice J_n .

8b. On définit φ par son action sur la base de W par

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varphi(u^i(v_0)) = X^{-n+i}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \quad \xi \circ \varphi(u^i(v_0)) &= \xi(X^{-n+i}) \\
 &= X^{-n+i+1} \\
 &= \varphi(u^{i+1}(v_0)) \\
 &= \varphi \circ u(u^i(v_0))
 \end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}\xi \circ \varphi(u^{n-1}(v_0)) &= \xi(X^{-1}) \\ &= 0 \\ &= \varphi \circ u(u^{n-1}(v_0))\end{aligned}$$

On a bien prouvé $\xi \circ \varphi = \varphi \circ u|_W$.

8c. D'après l'équation 2,

$$\begin{aligned}\xi^n \circ \psi &= \psi \circ u^n \\ &= \psi \circ 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ce qui montre $\text{Im}(\psi) \subset \ker \xi^n$.

8d. D'après la question 4, $\text{vect}(X^{-j})_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \ker \xi^n$. De plus, $\text{Im}(\psi) \supset \psi|_W(W) = \varphi(W) = \text{vect}(X^{-j})_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \ker \xi^n$, donc finalement

$$\text{Im}(\psi) = \ker \xi^n$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\text{rang}(\psi) &= n \\ &= \dim W\end{aligned}$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim \ker \psi = \dim V - \dim W$$

De plus $\ker \psi$ et W sont en somme directe car, φ étant un isomorphisme de W dans $\ker \xi^n$, $\forall x \in \ker \psi \cap W$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \psi|_W(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \varphi(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0\end{aligned}$$

On a donc

$$V = W \oplus \ker \psi$$

De plus

$$\begin{aligned}\psi(u(\ker \psi)) &= \psi \circ u(\ker \psi) \\ &= \xi \circ \psi(\ker \psi) \\ &= \xi(\{0\}) \\ &= \{0\}\end{aligned}$$

i.e. $u(\ker \psi) \subset \ker \psi$.

9. Théorème de décomposition : existence. Nous allons raisonner par récurrence sur $n = \dim V \in \mathbb{N}$.

Remarquons au passage que l'indice de nilpotence r de u vérifie $r \leq n$ d'après la question 8a. Pour $n = 1$ le seul endomorphisme nilpotent est l'application nulle, qui a pour matrice $0 = J_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit V un espace vectoriel de dimension $n + 1$. Soit r_1 l'indice de nilpotence de u . Si $r_1 = 1$ i.e. $u = 0$, alors la matrice de u est $0 = J_0$ et on a terminé.

Supposons maintenant $u \neq 0$. Comme dans la question 8, on définit

$$W = \text{vect}(u^i(v_0))_{i \in \llbracket 0, r_1 - 1 \rrbracket}$$

tel que

$$V = W \oplus \ker \psi$$

Si $\ker \psi = \{0\}$, c'est fini car la matrice de u dans la base $(u^i(v_0))_{i \in \llbracket 0, r_1 - 1 \rrbracket}$ est J_{n+1} .

u est un endomorphisme nilpotent de $\ker \psi$ (ce dernier est stable par u), d'indice $r_2 \leq r_1$. Comme $\dim W > 1$, on a $m = \dim \ker \psi \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence: il existe une base de $\ker \psi$ telle que la matrice de $u|_{\ker \psi}$ soit de la forme:

$$M_1 = \begin{bmatrix} J_{r_2} & & & \\ & J_{r_3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_s} \end{bmatrix}$$

avec $r_2 \geq r_3 \geq \dots \geq r_s$.

Comme on a

$$M_1^k = \begin{bmatrix} J_{r_2}^k & & \\ & J_{r_3}^k & \\ & & \ddots \\ & & & J_{r_s}^k \end{bmatrix}$$

et que J_r est nilpotente d'ordre r , on vérifie facilement qu'en effet l'ordre de nilpotence de cette matrice est r_2 .

On a vu en 8a que la matrice de u dans la base $(u^i(v_0))_{i \in \llbracket 0, r_1-1 \rrbracket}$ de W est J_{r_1} . En adjoignant les deux bases bien choisies, on obtient une base de $V = W \oplus \ker \psi$ dans laquelle la matrice de u a encore la forme désirée:

$$M = \begin{bmatrix} J_{r_1} & & \\ & J_{r_2} & \\ & & J_{r_3} \\ & & & \ddots \\ & & & & J_{r_s} \end{bmatrix}$$

10. Théorème de décomposition : unicité de la taille des blocs. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2,

$$\begin{aligned} \delta_k(M) &= \sum_{i=1}^s \delta_k(J_{r_i}) \\ &= \#\{i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \quad r_i = k\} \end{aligned}$$

Si on trouve une décomposition de Jordan M' de u dans une autre base (donc M' et M sont semblables), comme $\delta_k(M) = \delta_k(M')$ cela prouve l'unicité de la décomposition (les blocs J_r qui interviennent et leurs nombres respectifs).

V. Version "graduée" du théorème de décomposition

11. Propriétés de h .

11a. h est diagonalisable car il annule le polynôme scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples

$$X^N - 1 = \prod_{i=0}^{N-1} (X - \zeta^i)$$

11b. Soit $j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $x \in V_j$.

$$\begin{aligned} h(u(x)) &= \zeta u(h(x)) \\ &= \zeta^{i+1} u(x) \end{aligned}$$

donc $u(x) \in V_{j+1}$ et $u(V_j) \subset V_{j+1}$.

11c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} h \circ u \circ h^{-1} &= \zeta u \\ \Leftrightarrow h^{k-1} \circ h \circ u \circ h^{-1} \circ h^{-(k-1)} &= \zeta h^{k-1} \circ u \circ h^{-(k-1)} \\ \Leftrightarrow h^k \circ u \circ h^{-k} &= \zeta h^{k-1} \circ u \circ h^{-(k-1)} \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$h^k \circ u \circ h^{-k} = \zeta^k u$$

$$\begin{aligned} h \circ u^l \circ h^{-1} &= (h \circ u \circ h^{-1})^l \\ &= \zeta^l u^l \end{aligned} \tag{3}$$

12. Recherche d'un supplémentaire stable.

12a. Si $x \in W$,

$$\begin{aligned} u(p(x)) &= u(x) \\ &= p(u(x)) \quad (\text{car } u(x) \in W) \end{aligned}$$

Si $x \in W'$,

$$\begin{aligned} u(p(x)) &= u(0) \\ &= 0 \\ &= p(u(x)) \quad (\text{car } u(x) \in W') \end{aligned}$$

Comme $V = W \oplus W'$, on a montré $u \circ p = p \circ u$.

12b. On a $\text{Im } p = W$ donc $\text{Im } p \circ h^{-k} \subset W$ et $\text{Im } h^k \circ p \circ h^{-k} \subset W$ car W est stable par h et donc aussi par h^k . Cela entraîne que $\text{Im } \bar{p} \subset W$

Soit $x \in W$. On remarque que W est stable par $h^{-1} = h^{N-1}$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad h^k \circ p \circ h^{-k}(x) &= h^k(p(\underbrace{h^{-k}(x))}_{\in W})) \\ &= h^k(h^{-k}(x)) \\ &= x \end{aligned}$$

ce qui montre que $\bar{p}(x) = x$. En particulier $W \subset \text{Im } \bar{p}$ donc finalement $W = \text{Im } \bar{p}$.

De plus comme $\bar{p}|_W = \text{id}$, $\ker \bar{p} \cap W = \{0\}$, et comme

$$\begin{aligned} \dim \ker \bar{p} &= \dim V - \dim \text{Im } \bar{p} \\ &= \dim V - \dim W \end{aligned}$$

On a

$$V = \ker \bar{p} \oplus W$$

ce qui montre que $\bar{p}$ est un projecteur sur W .

12c.

12d.

$$\begin{aligned} h^k \circ p \circ h^{-k} \circ u &= h^k \circ p \circ h^{-k} \circ u \\ &= h^k \circ p \circ h^{(N-1)k} \circ u \\ &= \zeta^{(N-1)k} h^k \circ p \circ u \circ h^{(N-1)k} \\ &= \zeta^{(N-1)k} h^k \circ u \circ p \circ h^{-k} \\ &= \zeta^{(N-1)k} \zeta^k u \circ h^k \circ p \circ h^{-k} \\ &= \zeta^{Nk} u \circ h^k \circ p \circ h^{-k} \\ &= u \circ h^k \circ p \circ h^{-k} \end{aligned}$$

donc

$$u \circ \bar{p} = \bar{p} \circ u$$

$$\begin{aligned} h \circ h^k \circ p \circ h^{-k} &= h^{k+1} \circ p \circ h^{-k} \\ &= h^{k+1} \circ p \circ h^{-(k+1)} \circ h \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 h \circ \bar{p} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^{k+1} \circ p \circ h^{-k} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^{k+1} \circ p \circ h^{-(k+1)} \circ h \\
 &= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k} + h^N \circ p \circ h^{-N} \right) \circ h \\
 &= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k} + \text{id} \circ p \circ \text{id} \right) \circ h \\
 &= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k} \right) \circ h \\
 h \circ \bar{p} &= \bar{p} \circ h
 \end{aligned}$$

12e. On a

$$\begin{aligned}
 V &= \ker \bar{p} \oplus \text{Im } \bar{p} \\
 &= \ker \bar{p} \oplus W
 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 \bar{p}(u(\ker \bar{p})) &= u(\bar{p}(\ker \bar{p})) \\
 &= u(\{0\}) \\
 &= \{0\}
 \end{aligned}$$

ce qui montre $u(\ker \bar{p}) \subset \ker \bar{p}$. Comme h commutent aussi avec $\bar{p}$ le raisonnement est le même.

13. Version "graduée" du théorème de décomposition.

13a. On sait que h est diagonalisable, soit $(e_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une base de vecteurs propres de h , en notant $m = \dim V$.

$$\exists j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad u^{n-1}(e_j) \neq 0$$

car sinon on aurait $u^{n-1} = 0$.

13b. Comme dans la question 8, on considère le sev $W = \text{vect}(u^i(v))_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$, stable par u . v est un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ .

La matrice de $u|_W$ est J_n .

De plus h est diagonale dans cette base car d'après l'équation 3

$$\begin{aligned}
 h(u^i(v)) &= \zeta^i u^i(h(v)) \\
 &= \lambda \zeta^i u^i(v)
 \end{aligned}$$

h annulant le polynôme $X^N - 1$, ses valeurs propres sont à chercher parmi les racines N èmes de l'unité, disons $\lambda = \zeta^a$.

La matrice de $h|_W$ est donc de la forme

$$D(n, a) = \begin{bmatrix} \zeta^a & & & & & \\ & \zeta^{a+1} & & & & \\ & & \zeta^{a+3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \zeta^{a+n-1} \end{bmatrix}$$

La question 12 nous fournit un supplémentaire de W stable par u et h . On procède alors à une récurrence du type de celle faite à la question 9 pour conclure à l'existence d'une base de V dans laquelle les matrices de u et h sont de la forme souhaitée.

14. Un exemple.

14a. Soit $(e_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une base de vecteurs propres de h

$e_i \in V_j$ pour un certain $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Comme $V_4 = V_0 = \{0\}$ et $u(V_k) \subset V_{k+1}$, on a nécessairement $u^3(e_i) = 0$.

On peut conclure que $u^3 = 0$.

14b. Ici on a $N = 4$ et donc $\zeta = i$. On vient de voir que u est nilpotent d'indice $r \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Les seules matrices J_r qui peuvent apparaître dans la décomposition sont donc J_1, J_2, J_3 .

De plus comme l'énoncé suppose que 1 n'est pas valeur propre de h , les seuls couples $(J_r, D(r, a))$ pouvant intervenir sont au nombre de 6:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(3, 1) = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(2, 1) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(2, 2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$J_1 = [0]$$

$$D(1, 1) = [i]$$

$$J_1 = [0]$$

$$D(1, 2) = [-1]$$

$$J_1 = [0]$$

$$D(1, 3) = [-i]$$

14c. On a

$$\begin{aligned} V &= \ker(h - \text{id}) \oplus \ker(h - i\text{id}) \oplus \ker(h + \text{id}) \oplus \ker(h + i\text{id}) \\ &= \ker(h - i\text{id}) \oplus \ker(h + \text{id}) \oplus \ker(h + i\text{id}) \\ &= \bigoplus_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} V_i \end{aligned}$$

car h est diagonalisable. Soit $(e_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une base de vecteurs propres de h adaptée à cette décomposition.

Les restrictions de u^2 à $V_0 = V_4 = \{0\}$, V_2, V_3 sont nulles, donc $\text{rang}(u^2) = \text{rang}(u_2 \circ u_1) = r_{21}$.
Or on a $J_1^2 = J_2^2 = 0$ et

$$J_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui montre que le nombre de blocs J_3 est donné par r_{21} . C'est donc aussi le nombre de blocs $D(3, 1)$ ².

Le nombre de $i, -1, -i$ sur la diagonale correspondent respectivement à $\dim \ker(h - i\text{id}) = d_1$, $\dim \ker(h + \text{id}) = d_2$, $\dim \ker(h + i\text{id}) = d_3$.

On remarque que si $u(e_i) \neq 0$, alors $u(e_i) = e_{i+1}$. Une base de $u(V_1) = \text{vect}\{u(e_i), e_i \in V_1\}$ est donc $(e_{i+1})_{e_i \in V_1 \wedge u(e_i) \neq 0}$.

$$\begin{aligned} \text{rang}(u_1) &= \dim u(V_1) \\ &= \#\{i \in \llbracket 1, m \rrbracket, e_i \in V_1 \wedge u(e_i) \neq 0\} \end{aligned}$$

cela correspond à la somme du nombre de blocs $D(3, 1)$ et $D(2, 1)$. Le nombre de blocs $D(2, 1)$ vaut donc $r_1 - r_{21}$

$$\begin{aligned} \text{rang}(u_2) &= \dim u(V_2) \\ &= \#\{i \in \llbracket 1, m \rrbracket, e_i \in V_2 \wedge u(e_i) \neq 0\} \end{aligned}$$

cela correspond à la somme du nombre de blocs $D(3, 1)$ et $D(2, 2)$. Le nombre de blocs $D(2, 2)$ vaut donc $r_2 - r_{21}$.

Le nombre de matrices J_2 vaut donc $r_1 + r_2 - 2r_{21}$.

VI. Classification des couples de matrices rectangulaires

15. Une réduction. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) P est la matrice de passage de la base e' vers e . Q est la matrice de passage de la base f' vers f .

²En tout cas ceux qui sont couplés avec J_3 ; en effet on peut avoir sur la diagonale $i, -1, -i$ couplés avec des J_2 ou J_1

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On pose

$$R = \left[\begin{array}{cc} \underbrace{P}_{m} & \underbrace{0}_n \\ \underbrace{0}_m & \underbrace{Q}_n \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \vphantom{\left[\begin{array}{cc} P & 0 \\ 0 & Q \end{array} \right]} \vphantom{\left. \begin{array}{l} \text{taille } m \\ \text{taille } n \end{array} \right\}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{taille } m \\ \text{taille } n \end{array}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Posons

$$R = \left[\begin{array}{cc} \underbrace{P}_{m} & \underbrace{T}_n \\ \underbrace{S}_m & \underbrace{Q}_n \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \vphantom{\left[\begin{array}{cc} P & T \\ S & Q \end{array} \right]} \vphantom{\left. \begin{array}{l} \text{taille } m \\ \text{taille } n \end{array} \right\}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{taille } m \\ \text{taille } n \end{array} \in GL_{m+n}(\mathbb{C})$$

On a

$$RH = \left[\begin{array}{cc} P & T \\ S & Q \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{cc} P & -T \\ S & -Q \end{array} \right]$$

Puis

$$\begin{aligned}
 HR &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & T \\ S & Q \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P & T \\ -S & -Q \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

on a donc

$$RH = HR \Leftrightarrow S = T = 0$$

donc R est diagonale par blocs et

$$R \in GL_{m+n}(\mathbb{C}) \Leftrightarrow P \in GL_m(\mathbb{C}) \wedge Q \in GL_n(\mathbb{C})$$

D'après un calcul par blocs simple, la condition $M_{A'B'} = RM_{AB}R^{-1}$ implique

$$\begin{aligned}
 A' &= QAP^{-1} \\
 B' &= PBQ^{-1}
 \end{aligned}$$

16. Deux applications linéaires : décomposition.

16a. $H^2 = I_{m+n}$ et donc $H^{-1} = H$.

$$\begin{aligned}
HMH^{-1} &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & B \\ -A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -B \\ -A & 0 \end{bmatrix} \\
&= -M
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad HM^n H &= (HMH)^n \\
&= (-1)^n M^n
\end{aligned}$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $Q = P(-X)$. il st direct par linéarité que

$$HP(M)H = Q(M) \tag{4}$$

16b. On sait que M et $-M$ sont semblables car $HMH = -M$.

$$\begin{aligned}
 \chi_M &= \det(M - XI) \\
 &= \det(H(-M - XI)H) \\
 &= \det(H^2(-M - XI)) \\
 &= \det(-M - XI) \\
 &= (-1)^p \det(M + XI) \\
 &= (-1)^p \chi_M(-X)
 \end{aligned}$$

En dérivant cette relation, on obtient:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \chi_M^{(n)} = (-1)^{p+n} \chi_M^{(n)}(-X)$$

Si on se rappelle que

$$\lambda \in \text{Sp}(M), \text{ d'ordre de multiplicité } m \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0 \wedge \chi'(\lambda) = 0 \wedge \cdots \wedge \chi^{(m)}(\lambda) = 0 \wedge \chi^{(m+1)}(\lambda) \neq 0$$

cela montre que bien que λ est valeur propre d'ordre m si et seulement si $-\lambda$ est valeur propre d'ordre m .

16c. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi(M) = 0$, et comme les polynômes X^r et Q sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}^{n+m} &= \ker \chi(M) \\
 &= \ker M^r \oplus \ker Q(M)
 \end{aligned}$$

Ces sous espaces sont stables par H car H et M anti-commutent.

17. Deux applications linéaires : cas nilpotent. On applique la version "graduée" du théorème de décomposition de la question 13. Ici $N = 2$ et $\zeta = -1$.

Les couples de blocs diagonaux sont de la forme

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \mathbf{0} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \\ & \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans le cas de $D(n, 1)$, c'est le dernier vecteur le base de $\ker(H - I)$ qui appartient à $\ker M$, donc on est dans le cas:

$$\begin{aligned} A_0 &= J_r \\ B_0 &= I_r \end{aligned}$$

(ii) si n est impair. Dans le cas de $D(n, 0)$, c'est le dernier vecteur le base de $\ker(H - I)$ qui appartient à $\ker M$, et on a $r = \dim \ker(H - I) = \dim \ker(H + I) + 1 = s + 1$ donc on est dans le cas:

$$\begin{aligned} A_0 &= \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{taille } s \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{r = s + 1} \\ B_0 &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 & 1 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{taille } r = s + 1 \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_s \end{aligned}$$

Dans le cas de $D(n, 0)$, c'est le dernier vecteur le base de $\ker(H + I)$ qui appartient à $\ker M$, et on a $r = \dim \ker(H - I) = \dim \ker(H + I) - 1 = s - 1$ donc on reprend le cas précédent en inversant A_0 et B_0

18. Deux applications linéaires : cas inversible.

18a. $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$. Si par exemple $m < n$, alors $\text{rang}(A) \leq m < n$, donc les n lignes de A sont liées ce qui ne permet pas à M d'être inversible. Donc $m = n$. Vu la forme par blocs de M , on a

$$\begin{aligned} p = 2m &= \text{rang}(M) \\ &= \text{rang}(A) + \text{rang}(B) \end{aligned}$$

ce qui nécessite

$$\text{rang}(A) = p$$

$$\text{rang}(B) = p$$

i.e. A et B sont inversibles.

18b. Soit $\lambda(\neq 0) \in \text{Sp}(M)$, D'après [16b](#), on peut écrire:

$$\begin{aligned}\chi &= (X - \lambda)^m (X + \lambda)^m Q \\ &= (X^2 - \lambda^2)^m Q\end{aligned}$$

où Q et $X^2 - \lambda^2$ sont premiers entre eux.

d'après le théorème de Cayley-Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{C}^p = \ker(M^2 - \lambda^2 I)^m \oplus \ker Q(M)$$

Ces deux sous espaces sont stables par H car $H(M^2 - \lambda^2 I)^m = (M^2 - \lambda^2 I)^m H$ et par M et $M^2 - \lambda^2 I$.

Posons $W = \ker(M^2 - \lambda^2 I)^m$. La restriction de l'endomorphisme $M^2 - \lambda^2 I$ de W est nilpotente, notons r son indice.

Comme dans [13a](#), soit e_1 un vecteur propre de H tel que $(M^2 - \lambda^2 I)^{r-1}(e_1) \neq 0$. Quitte à remplacer e_1 par Me_1 on peut supposer que $e_1 \in \ker(H - I)$. en effet,

$$\begin{aligned}(M^2 - \lambda^2 I)^{r-1}(e_1) = 0 &\Leftrightarrow M(M^2 - \lambda^2 I)^{r-1}(e_1) = 0 \quad (M \text{ inversible}) \\ &\Leftrightarrow (M^2 - \lambda^2 I)^{r-1}M(e_1) = 0\end{aligned}$$

La famille $e_1, (M^2 - \lambda^2 I)(e_1), \dots, (M^2 - \lambda^2 I)^{r-1}(e_1)$ est libre dans $\ker(H - I)$ d'après [8a](#) et le fait que $M^2 - \lambda^2 I$ laisse stable $\ker(H - I)$ car $H(M^2 - \lambda^2 I) = (M^2 - \lambda^2 I)H$. Notons $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ ces vecteurs.

La famille $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_{2r}) = (M(e_1), M(e_2), \dots, M(e_r))$ est une famille libre de $\ker(H + I)$, car M est injective et $M(\ker(H - I)) \subset \ker(H + I)$.

On a:

$$\begin{aligned}\forall i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad Me_{r+i} &= M^2(e_i) \\ &= e_{i+1} + \lambda^2 e_i\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Me_{2r} &= M^2(e_r) \\ &= \lambda^2 e_r\end{aligned}$$

Dans la base $(e_i)_{i \in \llbracket 1, 2r \rrbracket}$, les matrices de M et H ont bien la forme désirée:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \lambda^2 \mathbf{I}_r + \mathbf{J}_r \\ \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

La question 12 prouve l'existence d'un supplémentaire W' dans $\ker(M^2 - \lambda^2 I)^m$ stable par M et H , ce qui permet de conclure par une récurrence du type de 9. Il faut ensuite recommencer le travail sur le sous espace stable $\ker Q(M)$ et on aura terminé puisque $\mathbb{C}^p = \ker(M^2 - \lambda^2 I)^m \oplus \ker Q(M)$.