CONCOURS MINES-PONTS 2025
MATHÉMATIQUES 2 - MP

Pierre-Paul TACHER

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x^n p(\frac{1}{x}) &= x^n(\sum_{k=0}^{n} a_k x^{-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \qquad \text{(changement d'indice } k \leftarrow n-k) \qquad (1) \\
x^n p(\frac{1}{x}) &= p_0(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= x^n a_n \prod_{i=1}^{n} (\frac{1}{x} - \alpha_i) \\
&= a_n \prod_{i=1}^{n} x(\frac{1}{x} - \alpha_i) \\
&= a_n \prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i x)
\end{aligned}$$

ou encore en passant aux polynômes,

$$p_0 = a_n \prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i X) \tag{2}$$

2.

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ est une racine stable de } p &\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge p(\alpha) = p(\frac{1}{\alpha}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge p(\alpha) = p_0(\alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge (X - \alpha) \mid p \wedge p_0
\end{aligned}$$

D'autre part l'écriture 2, montre que les racines de p_0 sont les

$$\{\frac{1}{\alpha_i}, \alpha_i \neq 0\}$$

et $p_0(0) = a_n \neq 0$, donc 0 n'est pas racine de p_0 et $X \nmid p \wedge p_0$. On en conclut que

$$p \text{ ne possède pas de racines stables} \Leftrightarrow p \wedge p_0 = 1$$

3. Notons que par hypothèse $\# p^{-1}(\{0\}) = n$ et l'application

$$\begin{aligned} p^{-1}(\{0\}) &\to p^{-1}(\{0\}) \\ \alpha &\mapsto \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

est une bijection.

Or l'écriture 2, montre que les racines de p_0 sont les

$$\begin{aligned} \{\frac{1}{\alpha_i}, \alpha_i \neq 0\} &= \{\frac{1}{\alpha_i}, i \in [\![1,n]\!]\} && (\forall i \in [\![1,n]\!], \alpha_i \neq 0) \\ &= \{\alpha_i, i \in [\![1,n]\!]\} \\ &= p^{-1}(\{0\}) \end{aligned}$$

Donc p et p_0 sont colinéaires: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, p = \lambda p_0$.

De plus

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \underbrace{\prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \alpha_i \notin \{-1,1\}}} \alpha_i}_{=1} \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \alpha_i \in \{-1,1\}}} \alpha_i$$

Le premier produit vaut 1: cela se voit en regroupant par paire chaque racine avec son inverse. On en déduis:

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \in \{-1, 1\}$$

Le coefficient dominant de p_0 étant $(-1)^n a_n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$, on a $\lambda \in \{-1, 1\}$.

4. Si $n = 0$, l'équation est triviale. Supposons maintenant $\deg p = n \geqslant 1$ L'équation 2 s'écrit maintenant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \lambda x^n p(\frac{1}{x})$$

On dérive puis on multiplie par x:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) &= x p'(x) \\ &= n\lambda x^n p(\frac{1}{x}) - \lambda x^{n-1} p'(\frac{1}{x}) \\ h(x) &= np - \lambda (p')_0 && \text{(toujours d'après 2 puisque } \deg p' = n-1) \end{aligned} \tag{3}$$

Il faut remarquer que l'application[1]

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ p &\mapsto p_0 \end{aligned}$$

est involutive: $\varphi^2 = \mathrm{id}$

L'équation 3 montre que 0 ne peut pas être racine de $(p')_0$, sinon 0 serait racine de $np = Xp' + \lambda (p')_0$

[1] L'application φ n'est pas linéaire.

L'équation 2 montre alors que $\deg(p')_0 = \deg\varphi((p')_0) = \deg\varphi^2(p') = \deg p' = n-1$, donc

$$x^{n-1}(p')_0(\frac{1}{x}) = p'(x)$$

De plus, $\deg h = \deg p = n$ et donc

$$\begin{aligned} h_0(x) &= x^n h(\frac{1}{x}) \\ &= nx^n p(\frac{1}{x}) - \lambda x x^{n-1}(p')_0(\frac{1}{x}) \\ &= \lambda(np - xp'(x)) \end{aligned}$$

On a donc

$$h_0 = \lambda(np - Xp')$$

5. Par hypothèse, p a n racines réelles distinctes. En supposant $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, le théorème de Rolle appliqué sur chqaue intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, nous donne $n-1$ racines distinctes de p' dans chaque intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, et comme $\deg p' = n-1$, p' est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples.

On remarque que:

$$h_0 + \lambda h = \lambda np$$

or $p \wedge h = p \wedge Xp' = 1$ car p est à racines simples non nulles, D'après le théorème de Bezout, $\exists (u,v) \in \mathbb{R}[X]$,

$$up + vh = 1$$

et donc

$$\begin{aligned} uh_0 + \lambda uh &= \lambda n(1 - vh) \\ \Leftrightarrow uh_0 + \lambda(u + nv)h &= \lambda n \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à $h \wedge h_0 = 1$. D'après, la question 2, cela équivaut à $h = Xp'$ ne possède pas de racines stables, et donc p' non plus.

B. Liberté dune famille de polynômes

6.

- $\alpha_i = \frac{1}{\alpha_k}$ est racine de $f_j, j \in [\![1, k-1]\!]$.
- α_i est racine de $f_j, j \in [\![i+1, n]\!] \supset [\![k, n]\!]$ car $i < k$.

Donc $(X - \alpha_i) \mid f_j, \forall j \in [\![1, n]\!]$ et

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad f_j \in (X - \alpha_i)\mathbb{R}_{n-2}[X]$$

Comme $\dim((X - \alpha_i)\mathbb{R}_{n-2}[X]) = n - 1$, la famille de n vecteurs $(f_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ est liée.

7. $\forall f \in E$, le numérateur de $P_j(f)$ s'annule en α_j. On peut écrire, en mettant au même dénominateur puis en factorisant le numérateur par $X - \alpha_j$,

$$(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_i^2)f(\alpha_i) = (X-\alpha_j)\tilde{f}$$

avec $\tilde{f} \in E$. On a alors

$$P_j(f) = \tilde{f} \in E$$

Il est clair que P_j est linéaire, donc $P_j \in \mathcal{L}(E)$.

Comme on suppose qu'aucune racine de p n'est stable, ni -1 ni 1 ne sont racines de p.

On a

$$\frac{1}{1-\alpha_j X} \in \ker P_j$$

et donc

$$\mathrm{vect}(\frac{1}{1-\alpha_j X}) \subset \ker P_j$$

Réciproquement, si $f \in \ker P_j$,

$$\begin{aligned} & (1-\alpha_i X)f = (1-\alpha_i^2)f(\alpha_j) \\ \Leftrightarrow \qquad & f = \frac{(1-\alpha_i^2)f(\alpha_j)}{1-\alpha_i X} \in \mathrm{vect}(\frac{1}{1-\alpha_j X}) \end{aligned}$$

On conclut que

$$\mathrm{vect}(\frac{1}{1-\alpha_j X}) = \ker P_j$$

8. Déjà on vérifie facilement que

$$\tilde{g} = \frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X} \in E$$

et $\tilde{g}(\alpha_i) = 0$ car $(X-\alpha_j) \wedge (1-\alpha_j X) = 0$ car si $\alpha_j \neq 0$, $\frac{1}{\alpha_j}$ n'est pas racine de p. Puis,

$$\begin{aligned} (X-\alpha_j)P_j(\frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}) &= (1-\alpha_j X)\frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X} - (1-\alpha_i^2)\tilde{g}(\alpha_i) \\ &= (X-\alpha_j)g \\ \Leftrightarrow \qquad P_j(\frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}) &= g \end{aligned}$$

9. L'idée ici est à rapprocher de celle de la preuve de la propriété suivante:

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n, et $v_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(v_0) \neq 0$.

La famille $v_0, u(v_0), u^2(v_0), \ldots, u^{n-1}(v_0)$ est libre.

Explicitons l'expression des g_i:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad g_i = \frac{a_n}{1-\alpha_i X} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{X-\alpha_1}{1-\alpha_i X}$$

D'après la question précédente, on a $\forall k \in [\![1, i-1]\!]$,

$$P_k \circ P_{k-1} \circ \cdots \circ P_2 \circ P_1(g_i) = \frac{a_n}{1-\alpha_i X} \prod_{j=k+1}^{i-1} \frac{X-\alpha_1}{1-\alpha_i X}$$

en particulier,

$$P_{i-1} \circ P_{i-2} \circ \cdots \circ P_2 \circ P_1(g_i) = \frac{a_n}{1-\alpha_i X}$$

d'après la question 7,

$$P_i \circ P_{i-1} \circ \cdots \circ P_2 \circ P_1(g_i) = 0$$

et donc aussi, $\forall k \in [\![i, n]\!]$,

$$P_k \circ P_{k-1} \circ \cdots \circ P_2 \circ P_1(g_i) = 0$$

Remarquons maintenant que

$$(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ est libre dans } \mathbb{R}[X] \Leftrightarrow (g_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ est libre dans } E$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i = 0$$

Supponsons $\{i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0\} \neq \varnothing$ et soit alors j le maximum de cet ensemble.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \lambda_i g_i = 0 \\ \Rightarrow & P_{j-1} \circ P_{j-2} \circ \cdots \circ P_2 \circ P_1\Big(\sum_{i=1}^j \lambda_i g_i\Big) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_j \frac{a_n}{1-\alpha_j X} = 0 \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$ et la famille $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10. Un calcul matriciel direct ou une récurrence immédiate montre que

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad (S^T)^i U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \scriptstyle \text{ligne } i+1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Donc il s'agit de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

11.

$$B_j = \begin{bmatrix} -\alpha_j & 1 & & & \\ & -\alpha_j & 1 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & 1 \\ & & & & -\alpha_j \end{bmatrix}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_j & & & \\ & 1 & -\alpha_j & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & -\alpha_j \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} p(S) &= a_n \prod_{i=1}^{n} (S - \alpha_i I_n) \\ &= a_n (S - \alpha_n I_n) \prod_{i=1}^{n-1} (S - \alpha_i I_n) \\ &= a_n B_n \prod_{i=1}^{n-1} (S - \alpha_i I_n) \\ p(S) &= B_n f_n(S) \end{aligned}$$

et d'après l'équation 2,

$$\begin{aligned} p_0(S) &= a_n \prod_{i=1}^{n} (I_n - \alpha_i S) \\ &= a_n \prod_{i=2}^{n} (I_n - \alpha_1 S) \\ &= a_n B_n \prod_{i=1}^{n-1} C_1 \\ p_0(S) &= C_1 f_1(S) \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} J(p) &= p_0(S)^T p_0(S) - p(S)^T p(S) \\ &= f_1(S)^T C_1^T C_1 f_1(S) - f_n(S)^T B_n^T B_n f_n(S) \end{aligned}$$

ce qui nous fait prenser que la somme proposée dans l'énoncé est une somme téléscopique; et en effet, pour $i \in [\![2, n]\!]$,

$$\begin{aligned} C_i f_i(S) &= a_n (I_n - \alpha_i S) \prod_{k=i+1}^{n} (I_n - \alpha_k S) \prod_{j=1}^{i-1} (S - \alpha_j I_n) \\ &= a_n \prod_{k=i}^{n} (I_n - \alpha_k S) \prod_{j=1}^{i-2} (S - \alpha_j I_n)(S - \alpha_{i-1} I_n) \\ &= B_{i-1} f_{i-1}(S) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} f_j(S)(C_j^T C_j - B_j^T B_j) f_j(S) &= f_1(S)^T C_1^T C_1 f_1(S) - f_n(S)^T B_n^T B_n f_n(S) \\ &= J(p) \end{aligned} \tag{4}$$

12. Déjà on peut facilement calculer:

$$S^T S = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$U U^T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
C_j^T C_j - B_j^T B_j &= (I_n - \alpha_j S)^T (I_n - \alpha_j S) - (S - \alpha_j I_n)^T (S - \alpha_j I_n) \\
&= (1 - \alpha_j^2) I_n + (\alpha_j^2 - 1) S^T S \\
&= (1 - \alpha_j^2)(I_n - S^T S) \\
C_j^T C_j - B_j^T B_j &= (1 - \alpha_j^2) U U^T \qquad (5)
\end{aligned}$$

13. On reprend les équations 4 et 5:

$$J(p) = \sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i)^2 f_i(S)^T U U^T f_i(S)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1^2 & & & & \mathbf{0} \\ & 1-\alpha_2^2 & & & \\ & & 1-\alpha_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 1-\alpha_n^2 \end{bmatrix}$$

$$V = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \boldsymbol{f_1(S)^T U} & \boldsymbol{f_2(S)^T U} & \boldsymbol{\ldots} & \boldsymbol{f_{n-1}(S)^T} & \boldsymbol{f_n(S)^T U} \end{array}\right]$$

$$V^T = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{U^T f_1(S)} \\ \hline \boldsymbol{U^T f_2(S)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{U^T f_{n-1}(S)} \\ \hline \boldsymbol{U^T f_n(S)} \end{array}\right]$$

On a:

$$DV^T = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1^2 & & & & \mathbf{0} \\ & 1-\alpha_2^2 & & & \\ & & 1-\alpha_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 1-\alpha_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U^T f_1(S)} \\ \hline \boldsymbol{U^T f_2(S)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{U^T f_{n-1}(S)} \\ \hline \boldsymbol{U^T f_n(S)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{(1-\alpha_1^2)U^T f_1(S)} \\ \hline \boldsymbol{(1-\alpha_2^2)U^T f_2(S)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{(1-\alpha_{n-1}^2)U^T f_{n-1}(S)} \\ \hline \boldsymbol{(1-\alpha_n^2)U^T f_n(S)} \end{bmatrix}$$

puis

$$VDV^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \boldsymbol{f_1(S)^T U} & \boldsymbol{f_2(S)^T U} & \dots & \boldsymbol{f_{n-1}(S)^T} & \boldsymbol{f_n(S)^T U} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{(1-\alpha_1^2)U^T f_1(S)} \\ \hline \boldsymbol{(1-\alpha_2^2)U^T f_2(S)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{(1-\alpha_{n-1}^2)U^T f_{n-1}(S)} \\ \hline \boldsymbol{(1-\alpha_n^2)U^T f_n(S)} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha_i^2) f_i(S)^T U U^T f_i(S)$$

$$= J(p)$$

14.

- Si 1 ou -1 sont racines de p, alors D, puis par conséquence $J(p)$ ne sont pas inversibles.
- D'après la question 6, si p possède un racine stable $\alpha_i \notin \{-1, 1\}$ ($\alpha_i \neq \frac{1}{\alpha_i}$), alors $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est liée, donc les colonnes de V sont liées, donc V, puis par conséquence $J(p)$ ne sont pas inversibles.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

15. Soit F un sev qui vérifie la condition $(\mathcal{C}_A)$, de dimension maximale $d(A)$. On a puisque P est inversible,

$$X = 0 \Leftrightarrow PX = 0$$

et $\forall X \in F$,

$$(PX)^T B(PX) = X^T AX > 0$$

Ainsi le sev $\{PX, X \in F\}$ vérifie la condition $\mathcal{C}_B$, il est de dimension $d(A)$ car P est inversible donc

$$d(B) \geqslant d(A)$$

A et B ont des rôles symétriques:

$$B = (P^{-1})^T AP^{-1}$$

donc on a aussi $d(A) \geqslant d(B)$, et finalement $d(A) = d(B)$.

16. M est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormale; soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une telle base, quitte à réordonner on peut supposer que

$$F_M = \mathrm{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{\pi(M)}) = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(M)\\ \lambda>0}} \ker(M - \lambda I_n)$$

Ce sev est bien de dimension $\pi(M)$ car M est diagonalisable et la dimension de chaque sous espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Si P est la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base,

$$M = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & \mathbf{0} & & \\ & & \lambda_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_{\pi(M)} & & \\ & & & & & \lambda_{\pi(M)+1} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^T$$

avec

$$\forall i \in [\![1, \pi(M)]\!], \quad \lambda_i > 0$$
$$\forall i \in [\![\pi(M)+1, n]\!], \quad \lambda_i \leqslant 0$$

Soit $X \in F_M$. On a:

$$P^T X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\pi(M)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\pi(M)} \end{matrix}}\right\} \pi(M) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} n-\pi(M) \end{array}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} X^T M X &= (P^T X) D (P^T X) \\ &= \sum_{i=1}^{\pi(M)} \lambda_i x_i^2 > 0 \qquad \text{(si } X \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned} \dim(F_M^\perp \cap G) &= \dim(F_M^\perp) + \dim(G) - \dim(F_M^\perp + G) \\ &\geqslant n - \pi(M) + \pi(M) + 1 - n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Soit alors $X \in F_M^\perp \cap G$, $X \neq 0$.

$$P^T X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{\pi(M)+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} \pi(M) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x_{\pi(M)+1} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}}\right\} n-\pi(M) \end{array}$$

et

$$(P^T X) D (P^T X) = \sum_{i=\pi(M)+1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant 0$$

ce qui contredit le fait que G vérifie la condition $(\mathcal{C}_M)$.

On conclut

$$\forall M \in S_n(\mathbb{R}), \quad d(M) = \pi(M)$$

18. La contraposée de la question 14 fait que si $J(p)$ est inversible, alors p ne possède aucune racine stable. De plus la matrice V de la question 13 est nécessairement inversible.

Puisque $J(p) \in S_n(\mathbb{R})$, la question précédente nous permet d'affirmer:

$$\begin{aligned}
\pi(J(p)) &= d(J(p)) && \text{(cf. question 17)} \\
&= d(\mathrm{Diag}((1-\alpha_j^2)_{j\in[\![1,n]\!]})) && \text{(cf. question 13 et 15)} \\
&= \pi(\mathrm{Diag}((1-\alpha_j^2)_{j\in[\![1,n]\!]})) && \text{(cf. question 17)} \\
\pi(J(p)) &= \sigma(p)
\end{aligned}$$

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19. Si p n'admet aucune racine stable, alors en particulier ni 1 ni -1 ne sont racines de p, et $D = \mathrm{Diag}((1-\alpha_j^2)_{j\in[\![1,n]\!]})$ est inversible. Si $J(p)$ est supposée non inversible, cela implique que V est non inversible, ou encore que les colonnes de V sont liées: il existe donc une combinaison linéaire à coefficients γ_i non tous nuls tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i(S^T)U = 0$$

Le polynôme

$$q = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i$$

convient.

D'après la question 9, la famille libre de n polynômes forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $q \neq 0$.

Mais si on pose

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$$

la question 10 montre que

$$q(S^T)U = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = 0$$

autrement dit $q = 0$. Il y a une contradiction donc on peut en déduire:

$$p \text{ n'a aucune racine stable } \Rightarrow J(p) \in GL_n(\mathbb{R})$$

20. Les questions 18 et 19 permettent de conclure:

$$p \text{ n'a aucune racine stable } \Leftrightarrow J(p) \in GL_n(\mathbb{R})$$

F. Un cas particulier

21. On a montré dans la question 5 que $h \wedge h_0 = 1$, donc h n'admet aucune racine stable; d'après le résultat de 20, $J(h) \in GL_n(\mathbb{R})$.

22. Soit $r \in]0,1[$.

Les racines de $p(rX)$ sont

$$\{\frac{\alpha_i}{r}, i \in [\![1,n]\!]\}$$

ce qui montre au passage que $p(rX)$ est scindé à racines simples.

Si $|\alpha_i| \geqslant 1$,

$$\left|\frac{\alpha_i}{r}\right| > 1$$

Si $|\alpha_i| < 1$,

$$\left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < 1$$
$$\Leftrightarrow |\alpha_i| < r$$

ce qui montre qu'en choisissant

$$\eta_1 = 1 - \max\{|\alpha_i|\,, |\alpha_i| < 1\} > 0$$

on s'assure que

$$\forall r \in]1-\eta_1, 1[, \quad \sigma(p(rX)) = \sigma(p)$$

De plus,

$$\frac{\alpha_i}{r} = \frac{r}{\alpha_k}$$
$$\Leftrightarrow r^2 = \alpha_i\alpha_k$$
$$\Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\alpha_i\alpha_k}$$

ce qui n'arrive pas sur l'intervalle $]1-\eta, 1[$, si on choisit

$$\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$$

où

$$\eta_2 = 1 - \max\{\sqrt{\alpha_i\alpha_k}, (i,k) \in [\![1,n]\!]^2 \wedge \alpha_i\alpha_k > 0 \wedge \sqrt{\alpha_i\alpha_k} < 1\}$$

Dans le cas où $\{\sqrt{\alpha_i\alpha_k}, (i,k) \in [\![1,n]\!]^2 \wedge \alpha_i\alpha_k > 0 \wedge \sqrt{\alpha_i\alpha_k} < 1\} = \varnothing$, on prend $\eta = \eta_1$.

Sur l'intervalle, $]1-\eta, 1[$, $p(rX)$ n'admet donc aucune racine stable.

23. Pour $r \in]1-\eta, 1[$, $p(rX)$ est scindé à racines simples et n'admet aucune racine stable.
d'après la question 20, $J(p(rX))$ est inversible.
La matrice

$$\forall r \in]1-\eta, 1[, \quad -\frac{n}{2(1-r)} J(p(rX))$$

a pour valeurs propres

$$\{-\underbrace{\frac{n}{2(1-r)}}_{>0} \beta_{r,i}, \quad \beta_{r,i} \in \mathrm{Sp}(J(p(rX)))\}$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall r \in]1-\eta, 1[, \quad \pi(-\frac{n}{2(1-r)} J(p(rX))) &= n - \pi(J(p(rX))) && \text{(0 n'est pas valeur propre de } J(p(rX)))\\ &= n - \sigma(J(p(rX))) && \text{(cf. 18)}\\ &= n - \sigma(p) && \text{(cf. 22)}\end{aligned}$$

24. On remarque que:

$$\begin{aligned}\varphi(p(rX)) &= (p(rX))_0\\ &= r^n p_0(\frac{X}{r})\end{aligned}$$

et comme $p_0 = \pm p$, on a:

$$J(p(rX)) = r^{2n} p_0(\frac{S}{r})^T p_0(\frac{S}{r}) - p(rS)^T p(rS)$$

Puis

$$\begin{aligned}F'(r) = 2nr^{2n-1} p(rS)^T p(rS) + r^{2n}(-\frac{1}{r^2})(p'(\frac{S}{r})^T p(\frac{S}{r}) + p(\frac{S}{r})^T p'(\frac{S}{r}))\\ - S^T p'(rS)^T p(rS) - p(rS)^T p'(rS) S\end{aligned}$$

puis

$$F'(1) = 2np(S)^T p(S) - 2S^T p'(S)^T p(S) - 2p(S)^T p'(S) S$$

25. Ce qui précède nous incite à faire un développement limité en 1 de F:

$$\begin{aligned}F(r) &= F(1) + (r-1)F'(1) + \mathrm{o}\,(r-1)\\ &= \underbrace{J(p)}_{=0 \text{ car } p = \pm p_0} + (r-1)F'(1) + \mathrm{o}\,(r-1)\\ F(r) &= (r-1)F'(1) + \mathrm{o}\,(r-1)\end{aligned} \tag{6}$$

d'autre part, en utilisant comme suggéré le résultat de 4,

$$\begin{aligned}J(h) &= h_0(S)^T h_0(S) + h(S)^T h(S)\\ &= (np(S^T) - S^T p'(S^T))(np(S) - Sp'(S)) - S^T p'(S^T) p'(S) S\\ &= n^2 p(S)^T p(S) - nS^T p'(S^T) p(S) - np(S^T) P'(S) S + S^T p'(S^T) p'(S) S - S^T p'(S^T) p'(S) S\\ &= \frac{n}{2} F'(1)\end{aligned}$$

Finalement en reprenant l'équation 6,

$$\frac{n}{2(r-1)}F(r) \underset{r\to 1}{=} J(h) + \mathrm{o}\,(1)$$

26. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles de $J(h)$ comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant. On a vu en 21 que $J(h)$ est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre. Soit alors

$$\epsilon = \frac{1}{2}\min\{|\lambda_i|\,, \quad i \in [\![1, n]\!]\} > 0$$

Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\cdot\|_\infty$, et on écrit la continuité de l'application définie sur $S_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant:

$$\exists \mu > 0, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M - J(h)\| \leqslant \mu \Rightarrow \max_{i\in[\![1,n]\!]}\{|\beta_i - \lambda_i|\} \leqslant \epsilon$$

où $\beta_2, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les valeurs propres réelles de M comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant.

Cela implique

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M - J(h)\| \leqslant \mu \Rightarrow \pi(M) = \pi(J(h))$$

L'équation 6 montre alors que pour r suffisamment proche de 1, $\pi(J(h)) = \pi(\frac{n}{2(r-1)}F(r))$. Mais on a vu d'autre part question 23 que

$$\forall r \in \,]1-\eta, 1[, \quad \pi(-\frac{n}{2(1-r)}J(p(rX))) = n - \sigma(p)$$

On obtient donc l'égalité:

$$\pi(J(h)) = n - \sigma(p)$$

Enfin on utilise le résultat de 18,

$$\begin{aligned}\pi(J(h)) &= \sigma(h)\\ &= \sigma(Xp')\\ &= \sigma(p') + 1\\ &= \pi(J(p')) + 1 \qquad \text{(cf. encore 18)}\end{aligned}$$

La dernière égalité résultant du fait que d'après 5, p' n'admet aucune racine stable, et donc d'après 20, $J(p')$ est inversible.

On obtient donc l'égalité désirée:

$$\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p'))$$

G. Méthode générale

27. Supposons α_i est une racine stable de g. c'est aussi une racine stable de $p = fg$ On rappelle que

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X)$$

donc si $e = \pm 1$ est racine de p d'ordre de multiplicité m, elle est aussi racine de p_0 d'ordre de multiplicité m, et donc

$$(X - e)^m \mid f$$

et

$$(X - e) \wedge g = 1$$

et donc e n'est pas racine stable de g.

Soit $\alpha_i \notin \{-1, 1\}$ une racine stable de g. Soit m, l les ordres de multiplicité respectifs de $\alpha_i, \frac{1}{\alpha_i}$ dans p. m, l sont aussi les ordre de multiplicité respectifs de $\frac{1}{\alpha_i}, \alpha_i$ dans p_0. Supposons sans perte de généralité que $m \geqslant l$. Alors:

$$(X - \alpha_i)^l (X - \frac{1}{\alpha_i})^l \mid f$$

et

$$(X - \alpha_i) \wedge g = 1$$

ce qui est contradictoire.

On conclut que g n'a aucune racine stable, on peut lui appliquer les résultats 18 et 20 pour obtenir:

$$\sigma(g) = \pi(J(g))$$

28. On a

$$\alpha_i \text{ racine stable de } p \Leftrightarrow \alpha_i \text{ racine de } f = p \wedge p_0$$

L'analyse précédente a montré que f est de la forme:

$$f = (X-1)^m (X+1)^n \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \alpha_i \notin \{-1,1\}, \text{ stable}}} (X - \alpha_i)^{n_i} (X - \frac{1}{\alpha_i})^{n_i}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} f = (X-1)^{m_1} (X+1)^{n_1} & \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \alpha_i \notin \{-1,1\}, \text{ stable}}} (X - \alpha_i)(X - \frac{1}{\alpha_i}) \\ & \times (X-1)^{\max\{0, m-1\}} (X+1)^{\max\{0, n-1\}} \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \alpha_i \notin \{-1,1\}, \text{ stable}}} (X - \alpha_i)^{n_i - 1} (X - \frac{1}{\alpha_i})^{n_i - 1} \end{aligned}$$

avec

$$m_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ 1 & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

$$n_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

On pose

$$g_1 = (X-1)^{m_1}(X+1)^{n_1} \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \alpha_i \notin \{-1,1\}, \text{ stable}}} (X-\alpha_i)(X-\frac{1}{\alpha_i})$$

qui est bien scindé à racines simples toutes stables. Pour déterminer g_1 (sans connaitre a priori les racines de f), on utilise le fait que

$$\alpha \text{ racine de } f \text{ de multiplité } n \Rightarrow \alpha \text{ racine de } f' \text{ de multiplité } n-1$$

et donc le polynôme

$$(X-1)^{\max\{0,m-1\}}(X+1)^{\max\{0,n-1\}} \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \alpha_i \notin \{-1,1\}, \text{ stable}}} (X-\alpha_i)^{n_i-1}(X-\frac{1}{\alpha_i})^{n_i-1} = f \wedge f'$$

et on peut le déterminer à l'aide par example de l'algorithme d'Euclide.

Donc on a:

$$f = (f \wedge f')g_1$$

On réitère le processus sur le polynôme $f \wedge f'$ jusqu'à épuiser tous les facteurs de f.

On obtient la décomposition

$$p = g_1 g_2 \dots g_l g$$

où tous les g_i sont scindés à racines simples toutes stables. On peut remarquer que

$$l = \max\{m,n\} \cup \{n_i, i \in [\![1,n]\!] \wedge \alpha_i \notin \{-1,1\} \text{ stable}\}$$

On peut conclure

$$\begin{aligned}
\sigma(p) &= \sum_{i=1}^{l} \sigma(g_i) + \sigma(g) \\
&= \sum_{i=1}^{l} (\deg g_i - 1 - \pi(J(g_i'))) + \pi(J(g)) \qquad \text{(cf. 26 27)} \\
&= \sum_{i=1}^{l} \deg g_i - l - \sum_{i=1}^{l} \pi(J(g_i')) + \pi(J(g)) \\
\sigma(p) &= n - \deg g - l - \sum_{i=1}^{l} \pi(J(g_i')) + \pi(J(g))
\end{aligned}$$