CONCOURS MINES-PONTS 2025
MATHÉMATIQUES 1 - MP

Pierre-Paul TACHER

Inégalité de Hölder

1. Fixons $y \in \mathbb{R}^+$. Étudions la fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \end{aligned}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car $p > 1$, et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) &= x^{p-1} - y \\ &= x^{\frac{p}{q}} - y \end{aligned}$$

ce qui montre que $f' > 0$ pour $x \in]y^{\frac{q}{p}} + \infty[$ et $f' < 0$ pour $x \in [0, y^{\frac{q}{p}}[$.
f admet donc un minimum en $y^{\frac{q}{p}}$, qui vaut:

$$\frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{q}{p}+1} = y^q - y^q = 0$$

On a bien montré:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geqslant xy$$

Alternativement, on peut aussi démontrer le résultat en utilisant la concavité du logarithme: Si $xy = 0$, l'inégalité est triviale. Si $xy > 0$, on a:

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln((x^p)^{\frac{1}{p}}(y^q)^{\frac{1}{q}}) \\ &= \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) \\ &\leqslant \ln(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}) \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2. Comme Ω est fini, toutes les vraibles aléatoires qui suivent admettent des moments de tout ordre. Supposons $\mathbb{E}(X^p) = \mathbb{E}(Y^q) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbf{P}(X = x \wedge Y = y) \\
&\leqslant \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \mathbf{P}(X = x \wedge Y = y) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \frac{x^p}{p} \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbf{P}(X = x \wedge Y = y) + \sum_{y\in Y(\Omega)} \frac{y^q}{q} \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x \wedge Y = y) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{x\in X(\Omega)} x^p\,\mathbf{P}(X = x) + \frac{1}{q} \sum_{y\in Y(\Omega)} y^q\,\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \frac{1}{p}\mathbb{E}(X^p) + \frac{1}{q}\mathbb{E}(Y^q) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1 \\
&= (\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad &X = 0 \qquad \text{presque surement}
\end{aligned}$$

et dans ce cas l'inégalité est triviale.

Supposons maintenant $\mathbb{E}(X) > 0$ et $\mathbb{E}(Y) > 0$.On peut appliquer le résultat précédent aux variables aléatoires $\frac{X}{(\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}}}$ et $\frac{Y}{(\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}}$. On obtient:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{E}(XY)}{(\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}} \leqslant 1 \\
\Leftrightarrow \qquad &\mathbb{E}(XY) \leqslant (\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

3. Pour $p = q = 2$, on obtient

$$\mathbb{E}(XY) \leqslant (\mathbb{E}(X^2))^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}(Y^2))^{\frac{1}{2}}$$

L'application suivante est bilinéaire:

$$\begin{aligned}
\varphi : L^0(\Omega)^2 &\to \mathbb{R} \\
(X, Y) &\mapsto \mathbb{E}(XY)
\end{aligned}$$

et sa forme quadratique $\Phi(X) = \mathbb{E}(X^2)$ est positive. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne le résultat voulu

$$\varphi(X, Y) \leqslant (\Phi(X))^{\frac{1}{2}} (\Phi(Y))^{\frac{1}{2}}$$

Rappelons la démonstration:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \Phi(tX + Y) = \mathrm{E}(X^2)t^2 + 2\,\mathrm{E}(XY)t + \mathrm{E}(Y^2)$$

On a un polynôme de signe constant sur $\mathbb{R}$, ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} \Delta &\leqslant 0 \\ \Leftrightarrow (\mathrm{E}(XY))^2 - \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2) &\leqslant 0 \\ \Leftrightarrow \qquad |\mathrm{E}(XY)| &\leqslant (\mathrm{E}(X^2))^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{E}(Y^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Une inégalité de déviation

4.

$$\begin{aligned} e^{\frac{t^2}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n+n)\times\cdots\times(n+2)(n+1)n!} \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ &= \cosh(t) \end{aligned}$$

5. Comme les VA X_i sont indépendantes, il en est de même pour les VA $e^{tc_iX_i}$ (lemme des coalitions). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{t\sum_{i=1}^n c_iX_i}) &= \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n e^{tc_iX_i}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tc_iX_i}) \qquad \text{(Indépendance des } e^{tc_iX_i}\text{)} \\ &= \prod_{i=1}^n \cosh(tc_i) \\ &\leqslant \prod_{i=1}^n e^{\frac{(tc_i)^2}{2}} \qquad \text{(cf. question 4)} \\ \mathbb{E}(e^{t\sum_{i=1}^n c_iX_i}) &= e^{\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2} \end{aligned}$$

6.

$$\left(e^{x\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|} > e^{tx}\right) = \left((e^{-x\sum_{i=1}^n c_iX_i} > e^{tx}) \cup (e^{x\sum_{i=1}^n c_iX_i} > e^{tx})\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(e^{x\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|} > e^{tx}\right) &= \mathbf{P}\left((e^{-x\sum_{i=1}^n c_iX_i} > e^{tx}) \cup (e^{x\sum_{i=1}^n c_iX_i} > e^{tx})\right) \\ &\leqslant \mathbf{P}(e^{-x\sum_{i=1}^n c_iX_i} > e^{tx}) + \mathbf{P}(e^{x\sum_{i=1}^n c_iX_i} > e^{tx})) \end{aligned}$$

Comme les VA $e^{\pm x\sum_{i=1}^n c_iX_i}$ sont positives, on peut leur appliquer l'inégalité de Markov, ce qui donne:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(e^{x\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|} > e^{tx}\right) &\leqslant \mathbf{P}(e^{x\sum_{i=1}^n (-c_i)X_i} > e^{tx}) + \mathbf{P}(e^{x\sum_{i=1}^n c_iX_i} > e^{tx})) \\ &\leqslant \mathbf{P}(e^{x\sum_{i=1}^n (-c_i)X_i} \geqslant e^{tx}) + \mathbf{P}(e^{x\sum_{i=1}^n c_iX_i} \geqslant e^{tx})) \\ &\leqslant e^{-tx}\mathbb{E}(e^{x\sum_{i=1}^n (-c_i)X_i}) + e^{-tx}\mathbb{E}(e^{x\sum_{i=1}^n c_iX_i}) \\ &\leqslant 2e^{-tx}e^{\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2} \qquad \text{(cf. question 5)} \qquad (2)\end{aligned}$$

7. Par stricte croissance du logarithme,

$$\begin{aligned}\left(e^{x\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|} > e^{tx}\right) &= \left(x\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right| > tx\right) \\ &= \left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right| > t\right) \qquad \text{(si } x \neq 0\text{)} \qquad (3)\end{aligned}$$

L'inégalité 2 étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on va l'appliquer pour le x qui minimise le membre de droite, i.e. le x qui minimise:

$$-2tx + x^2\sum_{i=1}^n c_i^2 = x(-2t + x\underbrace{\sum_{i=1}^n c_i^2}_{\neq 0})$$

Cette expression du second degré en x est minimale pour

$$x = \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

et vaut alors

$$-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \frac{t^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = -\frac{t^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

Notons que si $t = 0$, l'inégalité est triviale, on peut donc supposer $t > 0$ et donc $x > 0$.
2 et 3 nous donne alors le résultat voulu:

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right| > t\right) \leqslant 2e^{-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}}$$

Inégalités de Khintchine

8. F_X est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ car si on pose

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_p\}$$

avec $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_p$, elle est constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\forall t \geqslant x_p, &\quad F_x(t) = 0 \\ \forall t \in [0, x_1[, &\quad F_x(t) = 1\end{aligned}$$

Comme $p \geqslant 1$, l'intégrale donnée est convergente et

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x_p} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t$$

En posant $x_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^p) &= \sum_{i=1}^{p} x_i^p\,\mathbf{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p} p \int_0^{x_i} t^{p-1}\,\mathrm{d}t\,\mathbf{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p} p\,\mathbf{P}(X = x_i) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} t^{p-1}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= p \sum_{j=0}^{p-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} t^{p-1}\,\mathrm{d}t \right) \underbrace{\sum_{i=j+1}^{p} \mathbf{P}(X = x_i)}_{=F_x(t) sur [x_j, x_{j+1}[} \\
&= p \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t \\
\mathrm{E}(X^p) &= p \int_0^{x_p} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

9. La fontion $t \mapsto t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$$0 \leqslant t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$$

dont l'intégrale converge en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$),donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

converge.

D'après la question 8,

$$\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^4 \right) = 4 \int_0^{+\infty} t^3 F_X(t)\,\mathrm{d}t$$

en posant

$$X = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \right|$$

D'après la question 7,

$$\begin{aligned}
F_X(t) = \ &\mathbf{P}\left(\left| \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \right| > t \right) \\
&\leqslant 2e^{-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}} \\
&= 2e^{-\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

On conclut ainsi

$$\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^4\right) \leqslant 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t \tag{4}$$

10. Si $i \neq j$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_i X_j) &= \mathrm{E}(X_i) E(X_j) \qquad \text{(les VA } X_i \text{ sont indépendantes)}\\ &= 0\end{aligned}$$

et on a

$$\mathrm{E}(X_i^2) = 1$$

En développant et en utilisant la linéarité de l'espérance on obtient:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} c_i^2\, \mathrm{E}(X_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i^2\end{aligned}$$

11. La question est très mal formulée, et les parenthèses sont placées au mauvais endroit dans l'énoncé; on va montrer que

$$\exists \beta_p \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \beta_p \left(\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 0$, alors

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^2 = 0 \qquad \text{presque surement} \\ \Leftrightarrow \quad & \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| = 0 \qquad \text{presque surement} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right) = 0 \end{aligned}$$

et n'importe quel réel β_p convient.

Supposons maintenant $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$ et posons

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} > 0$$

On a l'équivalence

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \beta_p \left(\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow &\left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s} X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \beta_p
\end{aligned}
$$

On a $\sum_{i=1}^{n}(\frac{c_i}{s})^2 = 1$, on procède ainsi comme dans la question 9 pour obtenir:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s} X_i\right|^p\right) \leqslant 2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow &\left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s} X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

le réel strictement positif

$$
\beta_p = \left(2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}
$$

convient.

12. Comme $p \geqslant 2$, la fonction $t \mapsto t^{\frac{2}{p}}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$. D'après l'inégalité de Jensen,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^2\right) &= \mathrm{E}\left(\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right) \\
&\leqslant \left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{2}{p}}
\end{aligned}
$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

13.

$$
\begin{aligned}
&1 \leqslant p < 2 \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{2} < p \leqslant 1
\end{aligned}
$$

La question revient à prouver que $\frac{1}{2} \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{p}\right[$, donc c'est direct.

Plus formellement, on vérifie que $\theta = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{4}}$ convient.

14. On vérifie que c'est l'inégalite de Hölder 1, appliquée en prenant

$$\begin{aligned}
X &= \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^{2\theta} \\
Y &= \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^{2(1-\theta)} \\
p' &= \frac{p}{2\theta} \\
q' &= \frac{2}{1-\theta}
\end{aligned}$$

D'après la question 13, on a bien

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$$

et $p', q' \geqslant 1$.

15. Même remarque qu'à la question 11: on va montrer

$$\exists \tilde{\alpha}_p \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \tilde{\alpha}_p \left(\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme dans la question 11, si $s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} = 0$, n'importe quel réel $\tilde{\alpha}_p$ convient. Supposons $s > 0$. D'après l'équation 4,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s} X_i)^4\right) \leqslant 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{E}\left((\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)^4\right) \leqslant 8 s^4 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

L'inégalité obtenue dans la question précédente implique alors

$$\begin{aligned}
& s^2 \leqslant \left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{2\theta}{p}} \left(8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1-\theta}{2}} s^{2(1-\theta)} \\
\Leftrightarrow\ & s^{2\theta} \leqslant \left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{2\theta}{p}} \left(8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1-\theta}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\left(8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1-\theta}{2}}} s^{2\theta} \leqslant \left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{2\theta}{p}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\left(8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1-\theta}{4\theta}}} s \leqslant \left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
\Leftrightarrow & \tilde{\alpha}_p \left(\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

en posant

$$\tilde{\alpha}_p = \frac{1}{\left(8\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1-\theta}{4\theta}}} > 0$$

16. Les résultats des questions 12 pour le cas $p \geqslant 2$ et 15 pour le cas $1 \leqslant p < 2$, montre que $\alpha_p = \min\{1, \tilde{\alpha}_p\} > 0$ convient.

Une première conséquence

17. On a déjà évoqué ce fait dans la question 3; la bilinéarité et la positivité sont directes. On a de plus:

$$\begin{aligned} & \varphi(X,X) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{E}(X^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \quad X = 0 \qquad \text{presque surement} \\ \Leftrightarrow\ & \quad X = 0 \qquad \text{(L'énoncé suppose qu'on confond VA nulle presque surement et VA nulle)} \end{aligned}$$

18. Puisque $u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, u est nulle à partir d'une certain rang, et donc $\psi(u)$ est bien définie et est une combinaison linéaire de VA de $L^0(\Omega)$, donc $\psi(u) \in L^0(\Omega)$.

Soit $u, v \in u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, et $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = v_n = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(u),\psi(v)) &= \mathrm{E}(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i, \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i) \\ &= \mathrm{E}(\sum_{i=0}^{n_0} u_i X_i, \sum_{j=0}^{n_0} v_j X_j) \\ &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n_0]\!]^2 \\ i\neq j}} u_i v_j\,\mathrm{E}(X_i X_j) + \sum_{i\in[\![0,n_0]\!]} u_i v_i \underbrace{\mathrm{E}(X_i^2)}_{=1} \\ &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n_0]\!]^2 \\ i\neq j}} u_i v_j \underbrace{\mathrm{E}(X_i)\,\mathrm{E}(X_j)}_{=0} + \sum_{i\in[\![0,n_0]\!]} u_i v_i \qquad \text{(si } i \neq j,\ X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{i\in[\![0,n_0]\!]} u_i v_i \\ \varphi(\psi(u),\psi(v)) &= \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

19. Si on combine les résultats des questions 11 et 16, on sait qu'il existe $(\alpha_p, \beta_p, \alpha_q, \beta_q) \in (\mathbb{R}^{+*})^4$ tels que

$$\forall u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \quad \begin{aligned} \alpha_p\|u\|_2 \leqslant \|u\|_p \leqslant \beta_p\|u\|_2 \\ \alpha_q\|u\|_2 \leqslant \|u\|_q \leqslant \beta_q\|u\|_2 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{\alpha_q}{\beta_p}\|u\|_p \leqslant \|u\|_q \leqslant \frac{\beta_q}{\alpha_p}\|u\|_p$$

i.e. $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur $\psi(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$.

Une deuxième conséquence

20. Si on combine les résultats des questions 11 et 16, avec $p=1$, on sait qu'il existe $(\alpha_1,\beta_1)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$ tels que

$$\forall(a_1,a_2,\dots,a_k)\in\mathbb{R}^k,\quad \alpha_1\|(a_1,a_2,\dots,a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}\leqslant \mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^k a_iX_i\right|\right)\leqslant \beta_1\|(a_1,a_2,\dots,a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}$$

La loi conjointes des VA indépendantes X_i est:

$$\forall(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k,\quad \mathbf{P}\left((X_1,X_2,\dots,X_k)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\right)=\frac{1}{2^k}$$

Il suffit de revenir à la formule de transfert pour calculer l'espérance

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^k a_iX_i\right|\right)&=\sum_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k}\mathbf{P}\left((X_1,X_2,\dots,X_k)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\right)\left|\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right|\\&=\frac{1}{n}\sum_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k}\left|\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right|\end{aligned}$$

21. On considère l'application linéaire:

$$\begin{aligned}T:\mathbb{R}^k&\to\mathbb{R}^n\\(a_1,a_2,\dots,a_k)&\mapsto(\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i)_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k}\end{aligned}$$

Soit $(a_1,a_2,\dots,a_k)\in\ker T$. Soit $(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k$; on a aussi $(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,-\epsilon_i,\dots\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k$ et

$$\begin{aligned}(0=)\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k\epsilon_ja_j+\epsilon_ia_i&=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k\epsilon_ja_j-\epsilon_ia_i\\\Leftrightarrow a_i&=-a_i\\\Leftrightarrow a_i&=0\end{aligned}$$

ce qui montre que $\ker T=\{0\}$, T est injective et réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}^k$ dans $\operatorname{Im}T$, et en particulier $\dim(\operatorname{Im}T)=k$.

On a de plus d'après la question précédente $\forall x=T(a_1,a_2,\dots,a_k)\in\operatorname{Im}T$,

$$\alpha_1n\|(a_1,a_2,\dots,a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}\leqslant\|x\|_1^{\mathbb{R}^n}\leqslant\beta_1n\|(a_1,a_2,\dots,a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}\tag{5}$$

Or,

$$\begin{aligned}(\|x\|_2^{\mathbb{R}^n})^2&=\sum_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k}(\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i)^2\\&=\sum_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k}(\sum_{i=1}^k a_i^2+2\sum_{\substack{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2\\j<k}}\epsilon_j\epsilon_ka_ja_k)\\&=n\sum_{i=1}^k a_i^2+2\sum_{\substack{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2\\j<k}}\sum_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k}\epsilon_j\epsilon_ka_ja_k\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, il y a exactement:

- 2^{k-2} éléments de $\{-1,1\}^k$ pour lesquels $(\epsilon_j, \epsilon_k) = (-1,1)$, et donc $\epsilon_j\epsilon_k = -1$.
- 2^{k-2} éléments de $\{-1,1\}^k$ pour lesquels $(\epsilon_j, \epsilon_k) = (1,-1)$, et donc $\epsilon_j\epsilon_k = -1$.
- 2^{k-2} éléments de $\{-1,1\}^k$ pour lesquels $(\epsilon_j, \epsilon_k) = (-1,-1)$, et donc $\epsilon_j\epsilon_k = 1$.
- 2^{k-2} éléments de $\{-1,1\}^k$ pour lesquels $(\epsilon_j, \epsilon_k) = (1,1)$, et donc $\epsilon_j\epsilon_k = 1$.

ce qui montre que

$$\sum_{\substack{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2\\ j<k}} \sum_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \epsilon_j\epsilon_k a_j a_k = 0$$

puis

$$\|x\|_2^{\mathbb{R}^n} = \sqrt{n}\|(a_1, a_2, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}$$

L'inégalité 5 s'écrit alors: $\forall x \in \operatorname{Im} T$,

$$\alpha_1\sqrt{n}\|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \leqslant \|x\|_1^{\mathbb{R}^n} \leqslant \beta_1\sqrt{n}\|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \tag{6}$$