Code sujet : 282

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC BS – HEC PARIS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Jeudi 24 avril 2025, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on note $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ les ensembles :

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}, \\ \mathrm{Im}(A) &= \{AX \mid X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}. \end{aligned}$$

- Lorsque $A = [a] \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a.
- Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de A est noté $A_{i,j}$.

- Si $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur colonne et $i \in [\![1,p]\!]$, on note x_i (lettre minuscule) sa i-ème composante.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\|X\|$ la norme euclidienne de X définie par

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{{}^tXX}$$

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur cet espace.
- Si Z est une variable aléatoire réelle, on note $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathbb{V}(Z)$ sa variance, si elles existent.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les éléments de $\mathbb{R}^k$ seront considérés comme des vecteurs colonnes. Autrement dit, et sauf indication du contraire, on confondra $\mathbb{R}^k$ et $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Dans tout l'énoncé, n, m et p désignent trois entiers naturels non nuls avec $n \geqslant 4$ et $n \geqslant p$ et A et B deux matrices réelles fixées telles que $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. M désigne la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $M = {}^tAA$ et on pose pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$D(X) = MX - {}^tAY.$$

On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\text{Minimiser } \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2 + \mu\|BX\|, \quad X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),$$

où dans toute la suite, et sauf indication du contraire, $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne un vecteur fixé et μ un réel donné.

On dira que X réalise un minimum global d'une fonction G si $G(X)$ est un minimum global de G.

L'énoncé comporte trois parties.
La partie I porte sur quelques résultats d'algèbre linéaire qui pourraient être utiles dans les parties II et III. Dans la partie II, on s'intéresse au problème d'optimisation ci-dessus quand $\mu = 0$, c'est-à-dire sans le second terme. La partie III est dédiée au problème d'optimisation ci-dessus quand $\mu = 1$.
Le mot **FIN** *marque la fin de l'énoncé.*

Pour les programmes Python, on dispose d'un petit formulaire à la fin du sujet. On importe aussi les bibliothèques suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
```

Toute fonction Python écrite en réponse à une question de l'énoncé peut être utilisée dans les programmes ou fonctions Python demandés par la suite

Partie I : autour de l'adjoint

Dans toute cette partie, E et F désignent deux espaces euclidiens de dimensions p et n respectivement. On note $\langle .,. \rangle_E$ le produit scalaire de E et $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base orthonormale de E. De même, on note $\langle .,. \rangle_F$ le produit scalaire de F et $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base orthonormale de F. Si G est un sous-espace vectoriel de E (respectivement de F) on note $G^\perp$ le supplémentaire orthogonal de G dans E (respectivement dans F).
On note u l'application linéaire de E dans F dont la matrice est A dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$; ainsi $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(u)$.

1. Soit ℓ une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un et un seul vecteur $a_0 \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \ \ell(x) = \langle a_0, x \rangle_E.$$

2. En déduire que, pour tout $y \in F$, il existe un seul $z_y \in E$ tel que

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle_F = \langle z_y, x\rangle_E.$$

3. Montrer que l'application $u^* : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & z_y \end{array} \right.$ est linéaire.

   L'application u^* s'appelle l'application adjointe de u. On a ainsi l'identité

$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ \langle u(x), y\rangle_F = \langle x, u^*(y)\rangle_E. \tag{1}$$

4. Montrer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(u^*) = {}^tA,$$

   et en déduire que

$$\mathrm{rg}\,(u^*) = \mathrm{rg}\,(u) \text{ et } (u^*)^* = u.$$

5. Montrer que

$$\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp.$$

6. Montrer que

$$\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$$

   et en déduire que

$$\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*).$$

7. Soit l'application $w : \mathrm{Im}(u^*) \to \mathrm{Im}(u^*)$ définie par

$$\forall x \in \mathrm{Im}(u^*),\ w(x) = u^* \circ u(x).$$

   Montrer que w est un isomorphisme et donner une interprétation en terme d'équation matricielle de ce résultat.

8. Soit π le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$ et Q sa matrice dans la base $\mathscr{B}_F$.
   (a) Montrer que

$${}^tAQ = {}^tA.$$

   (b) Montrer que $\mathrm{Tr}(Q) = \mathrm{rg}\,(u)$.

9. Montrer que M est inversible si et seulement si A est de rang égal à p.

10. On suppose que le rang de A est égal à p.
    (a) Montrer que

$$Q = A\,(M)^{-1}\,{}^tA.$$

    (b) Ecrire une fonction Python `Calcule_Q(A)` qui prend en entrée la matrice A de type array de taille $n \times p$, qui teste si A est de rang p et qui renvoie la matrice Q de la question précédente dans ce cas et un message d'erreur sinon.

11. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXMX \geqslant 0.$$

Partie II : minimisation d'une fonction quadratique

Dans cette partie, on s'intéresse à la minimisation de la fonction J_0, définie sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par :

$$J_0(X) = \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2,\ \text{ pour tout } X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

12. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et tout $H \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ on a

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}{}^tHMH. \tag{2}$$

13. Montrer que J_0 possède un minimum global en un point $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $D(X) = 0$.

On notera dans la suite $\mathbb{S}_0$ l'ensemble :

$$\mathbb{S}_0 = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid D(X) = 0\}.$$

14. Montrer qu'il existe $X_0 \in \ker(A)^\perp$ tel que

$$\mathbb{S}_0 \cap \ker(A)^\perp = \{X_0\}.$$

15. Soit $X \in \mathbb{S}_0$.
   (a) Justifier l'identité
   $$AX = QY. \tag{3}$$
   (b) Montrer que $X - X_0 \in \ker(A)$ et en déduire que si $X \neq X_0$ alors
   $$\|X\| > \|X_0\|.$$
   (c) On suppose que le rang de A est égal à p. Montrer que, $\mathbb{S}_0 = \{X\}$ avec
   $$X = M^{-1}\,{}^t\!AY \tag{4}$$

16. Dans cette question, on suppose à nouveau que le rang de A est égal à p et que Y s'écrit sous la forme
$$Y = AU_0 + Z,$$
où
   - U_0 est un vecteur constant fixé,
   - $Z = {}^t(z_1, \cdots, z_n)$ où $z_1, \cdots, z_n$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi normale de paramètres $(0, \sigma^2)$:
   $$z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

On définit X par la formule (4) (c'est-à-dire $X = M^{-1}\,{}^t\!AY$). Ainsi les composantes $y_1, \cdots, y_n$ de Y et les composantes $x_1, \cdots, x_p$ de X sont toutes des variables aléatoires.
On considère aussi la variable aléatoire :

$$T = \|A(X - U_0)\|^2.$$

   (a) Montrer que $T = \|QZ\|^2 = {}^tZQZ$
   (b) Proposer une fonction Python `simuleT(A,sigma)` qui prend en argument A de type `array` et `sigma` de type `flottant` simulant la variable aléatoire T.
   (c) Proposer une fonction Python `esperance(A,sigma)` qui prend en argument A de type `array` et `sigma` de type `flottant` et qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de T.
   (d)

   - Nous avons testé notre algorithme pour $\sigma = 1$ et trois matrices A_1, A_2 et A_3 où

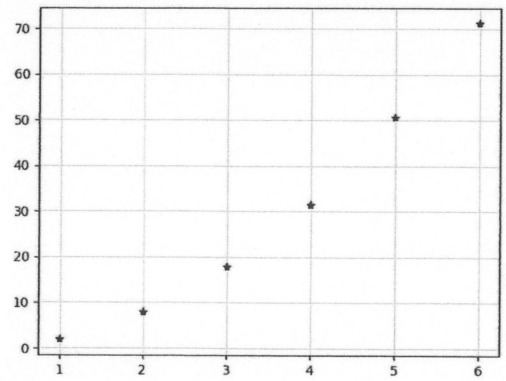
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Les resultats obtenus sont $1,99 \quad 3,01 \quad 4,97$.
   Que pouvez-vous conjecturer ?

- On effectue maintenant le programme suivant

```
sig=np.arange(1,7)
rep=np.zeros(6)
for k in range(6) :
    rep[k]=esperanceT(A1,sig[k])
plt.plot(sig, rep, "*k")
plt.grid()
plt.show()
```

On obtient ce graphique



Que pouvez-vous conjecturer ?

Prouvons nos conjectures dans les questions suivantes !

(e) Exprimer $\mathbb{E}(z_1^2)$, $\mathbb{E}(z_1^3)$ et $\mathbb{E}(z_1^4)$ en fonction de σ.

(f) Montrer que $T = T_1 + 2T_2$ où $T_1 = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2$ et $T_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j$.

En déduire $\mathbb{E}(T)$ et vérifier vos conjectures.

(g) Montrer que $\mathbb{E}(T_1 T_2) = 0$.

(h) Notons $q = \sum_{k=1}^{n} Q_{k,k}^2$.

Montrer que $\mathbb{E}(T_1^2) = \sigma^4(2q + p^2)$ et $\mathbb{E}(T_2^2) = \dfrac{\sigma^4}{2}(p - q)$.

(i) En déduire que $\mathbb{V}(T) = 2p\sigma^4$ et Montrer pour tout $\alpha > 0$ on a

$$\mathbb{P}(T > (1+\alpha)p\sigma^2) \leqslant \frac{2}{p\alpha^2}.$$

Partie III : minimisation d'une fonction non différentiable

Dans cette partie, on suppose à nouveau que $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur fixé (et non une variable aléatoire). On s'intéresse désormais à la fonction J définie sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par :

$$J(X) = \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2 + \|BX\|, \quad \text{pour } X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}). \tag{5}$$

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{N}(X)$ l'ensemble

$$\mathscr{N}(X) \quad = \quad \{{}^tBV \mid V \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ \|V\| \leqslant 1 \text{ et } \|BX\|V - BX = 0\}.$$

17. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|u + tv\| - \|u\|}{t} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}. \tag{6}$$

18. Soit $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalisant le minimum global de J. Montrer que si $BX_0 \neq 0$ alors nécessairement

$$-D(X_0) = {}^t B \frac{BX_0}{\|BX_0\|},$$

et en déduire que $-D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0)$.

19. Soit $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalisant le minimum global de J et vérifiant $BX_0 = 0$.

(a) Montrer que

$$\forall H \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle D(X_0), H \rangle \leqslant \|BH\|.$$

(b) En déduire que

$$D(X_0) \in \ker(B)^{\perp}.$$

(c) En déduire qu'il existe un vecteur $W \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ tel que $D(X_0) = {}^t BW$.

(d) En déduire qu'il existe un vecteur $V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $D(X_0) = {}^t BBV$.

(e) Montrer que $\|BV\| \leqslant 1$ et en déduire que $-D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0)$.

20. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$.

(a) Montrer que

$$\|u + v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|} \right)^2 = \frac{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}.$$

(b) En déduire que

$$\|u + v\| - \|u\| \geqslant \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|} \tag{7}$$

21. Soient maintenant $X_0, X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathscr{N}(X_0)$.

(a) Montrer que

$$\|BX\| - \|BX_0\| \geqslant \langle W, X - X_0 \rangle.$$

(b) En déduire que

$$J(X) - J(X_0) \geqslant \langle D(X_0) + W, X - X_0 \rangle. \tag{8}$$

22. En déduire que $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalise un minimum global de J si et seulement si

$$-D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0).$$

23. On se place dans toute la suite dans le cas où $n = p = m$, $A = I_n$ et B la matrice diagonale définie par :

$$B_{i,i} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k, \\ 0 & \text{si } k+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

où k est un entier naturel vérifiant $1 \leqslant k < n$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sont des nombres réels tous non nuls. On pose

$$\rho(Y) \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\alpha_i^2}.$$

On définit la fonction F de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall \lambda \in [0, +\infty[, \ \ F(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} \, .$$

(a) Montrer que

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[, \ F(\lambda) \leqslant -1 + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^{k} y_i^2.$$

(b) On suppose dans cette question uniquement que $\rho(Y) > 1$. Montrer qu'il existe un et un seul $\lambda_0 \in]0, +\infty[$ tel que $F(\lambda_0) = 0$ et justifier l'inégalité

$$\lambda_0 \leqslant \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

(c) On pose

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho(Y) \leqslant 1, \\ \lambda_0 & \text{si } \rho(Y) > 1. \end{cases}$$

et

$$X_0 = Y - BV$$

où $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini par

$$v_i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i y_i}{\beta + \alpha_i^2} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k, \\ 0 & \text{si } k+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Montrer que X_0 réalise un minimum global de J.

(d) **Python**. On représente les données du problème :

— un tableau monodimensionnel de type array `alpha` contenant les valeurs $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$,

— un tableau monodimensionnel de type array `Y` contenant le vecteur Y,

— un paramètre `lda` de type flottant représentant un réel λ supposé positif,

— un paramètre `epsilon` de type flottant représentant un réel $\varepsilon > 0$.

i. Ecrire une fonction `FoncSom(alpha,Y,lda)` qui prend comme arguments `alpha`, `Y` contenant le vecteur Y, `lda` et qui renvoie la valeur $F(\lambda)$.

ii. Ecrire une fonction `CalcBeta(alpha,Y,epsilon)` qui prend comme arguments `alpha`, `Y` contenant le vecteur Y, `epsilon` et qui renvoie une valeur approchée β_a du réel β à ε prés, trouvée par une méthode de dichotomie dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} y_i^2]$ quand $\rho(Y) > 1$.

iii. Ecrire une fonction `CalcSolution(alpha,Y,epsilon)` qui prend les mêmes arguments que la fonction `CalcBeta` et qui renvoie un tableau monodimensionnel contenant la solution X_0 ci-dessus.

I. Mathématiques générales

```
import numpy as np
```

`np.linspace(a, b, n)`	Crée une matrice ligne de n valeurs uniformément réparties entre a et b (inclus).
`np.zeros([n,m])`	Crée la matrice nulle de taille $n \times m$.
`np.zeros(n)`	Crée la matrice ligne nulle de taille n.
`np.arange(a,b,eps)`	Renvoie la liste des flottants de a à b (non compris) de pas constant eps.
`np.shape(M)`	Donne la taille de la matrice M sous forme d'un tuple (couple).
`np.transpose(M)`	Renvoie la transposée de M.
`np.dot(M,P); M.dot(P); M @ P`	3 instructions synonymes, évaluent le produit matriciel MP.

II. Algèbre linéaire

```
import numpy.linalg as al
```

`al.inv(M)`	Renvoie l'inverse de la matrice M.
`al.matrix_rank(M)`	Renvoie le rang de la matrice M .
`al.matrix_power(M,n)`	Renvoie la nième puissance de la matrice M.

III. Simulations probabilistes

```
import numpy.random as rd
```

`rd.exponential (a, [q,r])` `rd.exponential (a, n)`	Simule une réalisation d'une matrice (resp d'un vecteur) aléatoire de dimension (q,r) (resp n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{a})$.
`rd.normal(m,d,[q,r])` `rd.normal(m,d,n)`	Simule une réalisation d'une matrice (resp d'un vecteur) aléatoire de dimension (q,r) (resp n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}\left(m, d^2\right)$
`rd.gamma(m,a,[q,r])` `rd.gamma(m,a,n)`	Simule une réalisation d'une matrice(resp d'un vecteur) aléatoire de dimension (q,r) (resp n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\Gamma\left(m, a\right)$.

IV. Graphiques

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

`plt.plot(X,Y,options)`	Génère la courbe des points définis par les listes X et Y suivant les options graphiques définies par la chaîne de caractère options.
`plt.grid()`	Affiche le quadrillage
`plt.show()`	Affiche le graphique.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1176 – D'après documents fournis