CONCOURS X 2024
MATHÉMATIQUES B - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

1a. On considère l'équation du second ordre:

$$y'' + qy = 0 \tag{1}$$

On se raméne à une équation du premier ordre:

$$y'' + qy = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

Comme q est continue sur $I = \mathbb{R}$, il en est de même pour

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On sait que les solutions de l'équation différentielle

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \tag{2}$$

forment un $\mathbb{C}$ sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_H$ de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, de dimension 2 et que $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0} : \mathcal{S}_H &\to \mathbb{C}^2 \\ Y &\mapsto Y(t_0) \end{aligned} \tag{3}$$

est un isomorphisme.

Appliqué à $t_0 = 0$, on a donc l'existence (et l'unicité) de deux fonctions y_1, y_2 dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que

$$\begin{cases} y_1(0) &= 1, \\ y_1'(0) &= 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y_2(0) &= 0, \\ y_2'(0) &= 1. \end{cases}$$

De plus les fonctions

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{bmatrix}$$

et

$$Y_2(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}$$

forment une base de $\mathcal{S}_H$ en tant qu'image réciproque par φ de la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

Le corollaire direct est que (y_1, y_2) forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation 1 dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1b. On pose

$$\begin{aligned} w(t) &= y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \\ &= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) \\ &= -q(t)(y_1(t)y_2(t) - y_1(t)y_2(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

w est donc une fonction constante et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) &= w(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

Notons y_T la fonction $t \mapsto y(t+T)$. y_T est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$\begin{aligned} y_T''(t) &= y''(t+T) \\ &= -q(t+T)y(t+T) \\ &= -q(t)y(t+T) && \text{(q est T périodique)} \\ &= -q(t)y_T(t) \end{aligned}$$

donc y_T est bien solution de 1; soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$y_T = \lambda y_1 + \mu y_2$$

en prenant la valeur en 0 on obtient:

$$y(T) = \lambda$$

en dérivant puis en prenant la valeur en 0 on obtient

$$y'(T) = \mu$$

donc on a bien

$$y_T = y(T)y_1 + y'(T)y_2$$

3.

$a \Rightarrow b$**.** Soit y une solution non nulle de 1 qui vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu y(t)$$

D'autre part on a

$$y = y(0)y_1 + y'(0)y_2$$

et

$$y' = y(0)y_1' + y'(0)y_2'$$

Si on évalue en T ces 2 équations on obtient l'équation matricielle:

$$\begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Mais comme par hypothèse

$$\begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

on a prouvé que le vecteur (non nul)

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

est vecteur propre de la matrice

$$W(T) = \begin{bmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{bmatrix}$$

associé à la valeur propre μ.

μ est donc racine du polynôme caractéristique de $W(T)$, qui est:

$$\begin{aligned} \chi_{W(T)} &= X^2 - \operatorname{Tr} W(T) + \det W(T) \\ &= X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1 \qquad \text{(cf. question 1b)} \end{aligned}$$

$b \Rightarrow a$**.** On suppose μ valeur propre de $W(T)$.

Soit y une solution de 1 telle que

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

soit un vecteur propre de $W(T)$, associé à μ.

y est non nulle. D'après l'équation 4,

$$\begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

et d'après la question 2,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu y(t)$$

$a \Leftrightarrow c$.

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu y(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T)e^{-\lambda T} = y(t) \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T)e^{-\lambda(t+T)} = y(t)e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

De plus, si on pose $q : t \mapsto y(t)e^{-\lambda t}$,

$$y \neq 0 \wedge y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Leftrightarrow q \neq 0 \wedge q \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

4.

4a. Le polynôme caractéristique de $W(T)$ est scindé à racines simples donc il existe une base (X_1, X_2) de $\mathbb{C}^2$ constiutée de vecteurs propres, associées aux valeurs propres $\mu_1 = e^{\lambda T}$ et $\mu_2 = \frac{1}{\mu_1} = e^{-\lambda T}$, respectivement.

Notons maintenant $(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2) = (\varphi^{-1}(X_1), \varphi^{-1}(X_2))$ l'image réciproque de cetta base par l'isomorphisme φ_0 de 3. C'est une base de $\mathcal{S}_H$, et $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation 1.

D'après la question 3, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(t) &= e^{\lambda t} w_1(t) \\ \tilde{w}_2(t) &= e^{-\lambda t} w_2(t) \end{aligned}$$

où w_1, w_2 sont deux fonctions T périodiques.

Au final, toute solution y de 1 peut s'écrire de manière unique :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t)$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

4b. Si on suppose $\mu_1 = \mu_2$, comme de plus on a $\mu_1 \mu_2 = 1$, on a $\mu_1 = \mu_2 \in \{-1, 1\}$.

- Si $\mu_1 = 1$, alors d'après 3, il existe une solution non nulle périodique de période T.
- Si $\mu_1 = -1$, alors d'après 3, il existe une solution non nulle périodique de période $2T$, puisque $y(t+2T) = -y(t+T) = y(t)$.

5.

5a. Fixons $(x_1, x_2) \in V^2$.On se ramène au cas de la variable réelle en posant:

$$\begin{aligned} \tilde{h} : [0,1] &\to E \\ t &\mapsto h(tx_1 + (1-t)x_2) \end{aligned}$$

$\tilde{h}$ est bien définie car V est convexe.

$\tilde{h} \in \mathscr{C}^1([0,1], E)$ car $h \in \mathscr{C}^1(V, E)$ et

$$\forall t \in [0,1], \quad \tilde{h}'(t) = dh_{tx_1+(1-t)x_2}(x_1 - x_2)$$

On écrit:

$$\begin{aligned} h(x_1) - h(x_2) &= \tilde{h}(1) - \tilde{h}(0) \\ &= \int_0^1 \tilde{h}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 dh_{tx_1+(1-t)x_2}(x_1 - x_2)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En prenant la norme:

$$\begin{aligned} \|h(x_1) - h(x_2)\| &\leqslant \int_0^1 \|dh_{tx_1+(1-t)x_2}(x_1 - x_2)\|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \|dh_{tx_1+(1-t)x_2}\|\|x_1 - x_2\|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C\|x_1 - x_2\| \int_0^1 1\,\mathrm{d}t \\ &= C\|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

5b. U est ouvert de E contenant a donc

$$\exists r_1 > 0, \quad B(a, r_1) \subset U$$

en posant $r_2 = \frac{r_1}{2} > 0$,

$$\overline{B(a, r_2)} \subset B(a, r_1) \subset U$$

La fonction $g : f - \mathrm{Id}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et $\mathrm{d}g_a = \mathrm{d}f_a - \mathrm{Id} = 0$.

$$\exists 0 < r < r_2 \quad \forall x \in \overline{B(a, r)}, \quad \|\mathrm{d}g_x\| \leqslant \frac{1}{2}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a, r)}^2, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| &= \|f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2) + (x_1 - x_2)\| \\ &= \|g(x_1) - g(x_2) + (x_1 - x_2)\| \\ &\geqslant \|x_1 - x_2\| - \|g(x_1) - g(x_2)\| && \text{(Inégalité triangulaire)} \\ &\geqslant \|x_1 - x_2\| - \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| && \text{(cf. 5a)} \\ &= \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

5c. soit $x \in B(a, r)$ et $b \in E \setminus \{0\}$, $\quad \mathrm{d}f_x(b) = 0$.

On a $\forall \lambda > 0, \quad \lambda b \in \ker \mathrm{d}f_x$ et $x' = x + \lambda b \in B(a, r) \subset \overline{B(a, r)}$ pour $\lambda \leqslant \delta$ suffisamment petit car $B(a, r)$ est un ouvert de E.

Mais alors,

$$\begin{aligned} \forall \lambda \leqslant \delta, f(x') - f(x) &\underset{\|x'-x\| \to 0}{=} \mathrm{d}f_x(x' - x) + o(\|x' - x\|) \\ &\underset{\|x'-x\| \to 0}{=} \lambda \mathrm{d}f_x(b) + o(\|x' - x\|) \\ &\underset{\|x'-x\| \to 0}{=} o(\|x' - x\|) \end{aligned}$$

ce qui contredit le résultat de la question 5b.

Donc $\ker \mathrm{d}f_x = \{0\}$.

L'application linéaire $\mathrm{d}f_x$ est donc injective, et même bijective puisque E est de dimension finie.

6.

6a. $\overline{B(a,r)}$ est un fermé, borné de E qui est un espace vectoriel de dimension finie, donc $\overline{B(a,r)}$ est un compact.

L'application continue g admet donc un minimum sur $\overline{B(a,r)}$

Mais on constate que $g(a) \leqslant \frac{r}{4}$ de part le choix de y_0; Or si $x \in \overline{B(a,r)} \setminus \overline{\mathring{B}(a,r)}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{g(x)} &= \|y_0 - f(x)\| \\
&= \|y_0 - f(a) + f(a) - f(x)\| \\
&\geqslant \|f(a) - f(x)\| - \|y_0 - f(a)\| && \text{(Inégalité triangulaire)} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|a - x\| - \|y_0 - f(a)\| && \text{(cf. question 5b)} \\
&= \frac{1}{2}r - \|y_0 - f(a)\| && (\|a-x\| = r \text{ sur la fontière de } \overline{B(a,r)}) \\
&\geqslant \frac{1}{2}r - \frac{r}{4} && \text{(hypothèse sur } y_0) \\
&= \frac{r}{4}
\end{aligned}$$

ce qui montre que le minimum est atteint en un point x_0 de $\overline{\mathring{B}(a,r)} = B(a,r)$.

6b. g est différentiable sur E et

$$\forall x \in B(a,r), \quad \mathrm{d}g_x = -2\mathrm{d}f_x^T(y_0 - f(x))$$

où l'on identifie $\mathrm{d}f_x$ et sa matrice dans une base donnée de E.

On sait que nécéssairement $\mathrm{d}g_{x_0} = 0$; or d'après 5c, $\mathrm{d}f_{x_0}$ est inversible, il en est de même pour $\mathrm{d}f_{x_0}^T$. On a donc:

$$\begin{aligned}
& -2\mathrm{d}f_{x_0}^T(y_0 - f(x_0)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & y_0 - f(x_0) = 0
\end{aligned}$$

On a donc

$$\min_{x \in \overline{B(a,r)}} \|y_0 - f(x)\|^2 = \min_{x \in B(a,r)} \|y_0 - f(x)\|^2 = 0$$

7.

7a. Si on pose

$$\begin{aligned}
h : E &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \|x - f(a)\|
\end{aligned}$$

h est continue et $W = h^{-1}(]-\infty, \frac{r}{4}[)$ est un ouvert de E en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.

D'autre part, f est continue car de classe $\mathscr{C}^1$, donc $f^{-1}(W)$ est ouvert.

Une intersection finie d'ouverts étant un ouvert, on a bien $V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ ouvert.

7b. On considère:

$$\begin{aligned} f_{|V} : V &\to W \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- La question 6 a montré que cette application est surjective,ie. $f_{|V}(V) = W$.
- La question 5b montre que $f_{|V}$ est injective.

On a donc que $f_{|V}$ est bijective.

La continuité de la réciproque provient aussi de la question 5b, qui montre que $f_{|V}^{-1}$ est lipschitzienne de rapport 2.

8.

8a. Prendre $P = 1 \in \mathbb{C}[X]$ montre que $I \in \mathbb{C}[A]^*$. De plus si $B_1 = P_1(A), B_2 = P_2(A) \in \mathbb{C}[A]^*$, $\exists P_3 \in \mathbb{C}[X], \quad B_2^{-1} = P_3(A)$ par définition de $\mathbb{C}[A]^*$, et

$$\begin{aligned} P_1(A)P_2(A) &= (P_1P_2)(A) \in \mathbb{C}[A]^* \\ &= P_2(A)P_1(A) \end{aligned}$$

$\mathbb{C}[A]^*$ est un sous-groupe abélien de $GL_n(\mathbb{C})$.

8b. On a déjà $\mathbb{C}[A]^* \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

Soit $B \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Soit $\chi = XQ + \alpha, Q \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme caractéristique de B.

B est inversible donc $\chi(0) = \alpha \neq 0$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton:

$$\chi(B) = 0 \Leftrightarrow B(-\frac{1}{\alpha}Q(B)) = I$$

Si on pose $B = P(A)$, cela montre que $B^{-1} = -\frac{1}{\alpha}(Q \circ P)(A) \in \mathbb{C}[A]$. Donc $B \in \mathbb{C}[A]^*$.

On a prouvé $\mathbb{C}[A]^* = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

9.

Soit $B = P(A) \in \mathbb{C}[A]^*$, On sait déjà que $e^B \in GL_n(\mathbb{C})$ $((e^B)^{-1} = e^{-B})$.

De plus,

$$e^B = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P(A)^k}_{\in \mathbb{C}[A]} \in \mathbb{C}[A]$$

car $\mathbb{C}[A] \subset M_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, donc fermé d'après un résultat classique.

finalement $e^B \in \mathbb{C}[A]^*$ et on a bien $\exp(\mathbb{C}[A]^*) \subset \mathbb{C}[A]^*$.

10.

10a. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi :]0,1[\times \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ (t,a) &\mapsto t + iat(1-t) \end{aligned}$$

Soit $(t,a),(t',a') \in]0,1[\times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Z_a(t) = Z_{a'}(t') &\Leftrightarrow t + iat(1-t) = t' + ia't'(1-t') \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t & = t', \\ at(1-t) & = a't'(1-t'). \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t & = t', \\ at(1-t) & = a't(1-t). \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t & = t', \\ a & = a' \qquad {\scriptstyle (t(1-t) \neq 0).} \end{cases} \end{aligned}$$

10b. En revenant à la définition du déterminant, on voit que $P(z) = \det(zM_1 + (1-z)M_2)$ est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n$. Soit $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ ses racines.

D'après l'injectivité démontrée à la question précédente, on a:

$$\#\varphi^{-1}(A) \leqslant p$$

Il suffit de choisir un a n'apparaissant pas dans les antécédents précédents (par example max $+1$ si l'ensemble est non vide); On est alors assuré que

$$\begin{aligned} \forall t \in]0,1[, \quad & P(Z_a(t)) \neq 0 \\ \forall t \in]0,1[, \quad & M(t) \in GL_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Commme de plus $M(0) = M_1$ et $M(1) = M_2$, le résultat est vrai sur $[0,1]$.

De plus

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) \in \mathbb{C}[A]$$

Donc

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) \in \mathbb{C}[A]^*$$

10c. Soit $M_1, M_2 \in \mathbb{C}[A]^*$. L'application $t \mapsto M(t)$ définie au dessus est continue, $M(0) = M_1$ et $M(1) = M_2$ et son image est contenue dans $\mathbb{C}[A]^*$.

On conclut que $\mathbb{C}[A]^*$ est connexe par arcs.

11.

11a. Déjà l'exponentielle est bien une application de $\mathbb{C}[A]$ dans lui-même d'après 9.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}[A] &\to \mathbb{C}[A]^* \\ B &\mapsto e^B \end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned} e^H &= I + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \\ &= e^0 + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \end{aligned}$$

Avec une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\| &\leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left\|H^k\right\| \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|H\|^k \\ &= e^{\|H\|}-\|H\|-1 \\ &\underset{\|H\|\to 0}{=} o(\|H\|)\end{aligned}$$

Cela montre que l'exponentielle est différentiable en 0 et $\mathrm{d}g_0 = \mathrm{Id}$.

En particulier $\mathrm{d}g_0$ est inversible.

De plus si on suppose connue la continuité de l'exponentielle, on peut appliquer le théorème d'inversion locale pour les fonctions d'un espace vectoriel de dimension finie:

Il existe un voisinage ouvert U de 0, un voisinage ouvert V de $e^0 = I$, tels que l'exponentielle réalise un $\mathscr{C}^0$ difféomorphisme de U sur V. La réciproque est donc continue sur V.

Alternativement on peut utiliser le résultat de la question 7b, si on suppose connu le caractère $\mathscr{C}^1$ de l'exponentielle matricielle, lequel n'est pas tout à fait trivial.

11b. Soit donc une boule ouverte $B(I,r) \subset V$.

Soit $M = e^{P(A)} \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Montrons que la boule ouverte $B(M, \frac{r}{\|M^{-1}\|}) \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.

Soit $N \in B(M, \frac{r}{\|M^{-1}\|})$. On a

$$\begin{aligned}N &= M + N - M \\ &= M(I + M^{-1}(N-M))\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\|I + M^{-1}(N-M) - I\| &< \|M^{-1}\|\|N-M\| \\ &< r\end{aligned}$$

cela montre que $I+M^{-1}(N-M) \in B(I,r) \subset V = \exp(U)$. donc on peut écrire $I+M^{-1}(N-M) = e^{Q(A)}$, puis

$$\begin{aligned}N &= e^{P(A)}e^{Q(A)} \\ &= e^{P(A)+Q(A)} \in \exp(\mathbb{C}[A]) \qquad \text{($P(A)$ et $Q(A)$ commutent)}\end{aligned}$$

On a montré que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert.

12.

Par le même raisonnement que dans la question précédente on peut montrer que pour $M \in M_n(\mathbb{C})$ fixé, l'ensemble $M\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert.

Montrons que

$$\mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M\in\mathbb{C}[A]^*\setminus\exp(\mathbb{C}[A])} M\exp(\mathbb{C}[A]) \tag{5}$$

soit $M \in \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$.

$$M = Me^0 \subset \bigcup_{M\in\mathbb{C}[A]^*\setminus\exp(\mathbb{C}[A])} M\exp(\mathbb{C}[A])$$

Réciproquement, soit

$$N = Me^{P(A)}$$

avec $M \in \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$.

Puisque $\mathbb{C}[A]^*$ est un groupe, on a $N \in \mathbb{C}[A]^*$. Par l'absurde, supposons que $N = e^{Q(A)} \in \exp(\mathbb{C}[A])$.

Dans ce cas, $M = Ne^{-P(A)} = e^{Q(A)}e^{-P(A)} = e^{(Q-P)(A)} \in \exp(\mathbb{C}[A])$ ce qui n'est pas.

On a montré l'égalité 5. Cela montre que $\mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert en tant que réunion d'ouverts, et donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^*$.

13.

13a. La fonction indicatrice de l'ensemble $\mathscr{S} = \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$, $\mathbb{1}_{\mathscr{S}}$, est continue sur $\mathbb{C}[A]^*$.

En effet, si $M \in \mathscr{S}$, $\mathbb{1}_{\mathscr{S}}(M) = 1$, et comme $\mathscr{S}$ est ouvert il existe une boule ouverte centrée sur M telle que $\mathbb{1}_{\mathscr{S}}(B(M,r)) = 1$.

Si $M \notin \mathscr{S}$, $\mathbb{1}_{\mathscr{S}}(M) = 0$, et comme $\mathbb{C}[A]^* \setminus \mathscr{S}$ est ouvert il existe une boule ouverte centrée sur M telle que $\mathbb{1}_{\mathscr{S}}(B(M,r)) = 0$.

13b. Si l'on reprend le chemin continu défini en question 10b, la fonction

$$\begin{aligned} \psi : [0,1] &\to \{0,1\} \\ t &\mapsto \mathbb{1}_{\mathscr{S}}(M(t)) \end{aligned}$$

est continue, et $\psi([0,1]) = \{0,1\}$. Cela contredit le fait que l'image d'un intervalle par une fonction continue soit un intervalle.

On peut conclure que $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^*$.

14.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors $A \in \mathbb{C}[A]^* = \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \exp(M_n(\mathbb{C}))$ Cela montre $GL_n(\mathbb{C}) \subset \exp(M_n(\mathbb{C}))$.

On a déjà évoqué l'inclusion réciproque donc finalement

$$GL_n(\mathbb{C}) = \exp(M_n(\mathbb{C}))$$

15.

On considère l'équation différentielle:

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{6}$$

Comme dans la première partie, soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ une base de $\mathscr{S}$, telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad Y_i(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

on note M(t) la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$.
Soit $\mu \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $M(T)$, et U un vecteur propre associé.
Soit Y l'unique solution de 6 telle que $Y(0) = U$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ \\ \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

Comme dans la première partie, on montre que $t \mapsto Y(t+T)$ est aussi solution; les coordonnés de $t \mapsto Y(t)$ dans la base des (Y_i) sont

$$U = Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ \\ \\ \vdots \\ y_n(0) \end{bmatrix}$$

Les coordonnés de $t \mapsto Y(t+T)$ dans la base des (Y_i) sont

$$Y(T) = \begin{bmatrix} y_1(T) \\ y_2(T) \\ \vdots \\ \\ \\ \vdots \\ y_n(T) \end{bmatrix}$$

On a toujours

$$\begin{aligned} Y(T) &= M(T)Y(0) \\ &= \mu Y(0) \end{aligned}$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \mu Y(t)$$

16.

16a. On sait, que pour $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0} : \mathscr{S} &\to \mathbb{C}^n \\ Y &\mapsto Y(t_0) \end{aligned} \tag{7}$$

est un isormorphisme, donc il envoie une base de $\mathscr{S}$ vers une base de $\mathbb{C}^n$. Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t) \in GL_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} M'(t) &= \left[Y_1'(t) \middle| Y_2'(t) \middle| \dots \middle| Y_n'(t) \right] \\ &= \left[A(t)Y_1(t) \middle| A(t)Y_2(t) \middle| \dots \middle| A(t)Y_n(t) \right] \\ &= A(t) \left[Y_1(t) \middle| Y_2(t) \middle| \dots \middle| Y_n(t) \right] \\ &= A(t)M(t) \end{aligned}$$

16b. On dérive $M(t)M(t)^{-1} = I$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & M'(t)M(t)^{-1} + M(t)(M(t)^{-1})' = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (M(t)^{-1})' = -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1} \end{aligned}$$

ce qui donne Ensuite

$$\begin{aligned} (M(t)^{-1}M(t+T))' &= -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1}M(t+T) + M(t)^{-1}M'(t+T) \\ &= -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1}M(t+T) + M(t)^{-1}A(t+T)M(t+T) \\ &= -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1}M(t+T) + M(t)^{-1}A(t)M(t+T) \\ &= M(t)^{-1} \underbrace{\left(-M'(t)M(t)^{-1} + A(t)\right)}_{=0} M(t+T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la matrice $M(t)^{-1}M(t+T)$ est indépendante de t.

16c. La matrice constante $M(t)^{-1}M(t+T)$ est inversible et comme $GL_n(\mathbb{C}) = \exp(M_n(\mathbb{R}))$ d'après 14,

$$\exists B \in M_n(\mathbb{C}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)e^{TB}$$

16d. En s'inspirant de la question 3, l'égalité précédente montre que la fonction $t \mapsto M(t)e^{-tB}$ est T périodique:

$$\begin{aligned} Q(t+T) &= M(t+T)e^{-(t+T)B} \\ &= M(t+T)e^{-TB}e^{-tB} \\ &= M(t)e^{TB}e^{-TB}e^{-tB} \\ &= M(t)e^{-tB} \\ &= Q(t) \end{aligned}$$

17.

17a. Les Z_i sont toujours des solutions de 6 (ce sont des combinaisons linéaires des Yi):

$$\begin{aligned}
\left[Z_1'(t)\middle|Z_2'(t)\middle|\dots\middle|Z_n'(t)\right] &= (M(t)P)' \\
&= M(t)'P \\
&= A(t)M(t)P \\
&= A(t)\left[Z_1(t)\middle|Z_2(t)\middle|\dots\middle|Z_n(t)\right] \\
&= \left[A(t)Z_1(t)\middle|A(t)Z_2(t)\middle|\dots\middle|A(t)Z_n(t)\right]
\end{aligned}$$

Comme de plus $\det(M(t)P) = \det M(t)\det P \neq 0$, l'isomorphisme 7 montre que les Z_i forment une base de $\mathscr{S}$.

17b.

$$\begin{aligned}
M(t)P &= Q(t)e^{tB}P && \text{(cf. 16d)} \\
&= Q(t)e^{tN+tD}P \\
&= Q(t)e^{tN}e^{tD}P && (DN = ND) \\
&= Q(t)e^{tN}e^{tP\Delta P^{-1}}P \\
&= Q(t)e^{tN}Pe^{t\Delta}P^{-1}P \\
&= Q(t)e^{tN}Pe^{t\Delta} \\
&= Q(t)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} t^i\frac{1}{i!}N^i\right)Pe^{t\Delta} \\
&= Q(t)\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\frac{1}{i!}N^i\right)Pe^{t\Delta} && (N \text{ est nilpotente d'indice} \leqslant n.) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(t^i\frac{1}{i!}Q(t)N^iP\right)e^{t\Delta} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} t^i\left[R_{i,1}(t)\middle|R_{i,2}(t)\middle|\dots\middle|R_{i,n}(t)\right]e^{t\Delta}
\end{aligned}$$

Or

$$e^{t\Delta} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e^{\lambda_{n-1} t} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

donc

$$M(t)P = \sum_{i=0}^{n-1} t^i\left[e^{\lambda_1 t}R_{i,1}(t)\middle|e^{\lambda_2 t}R_{i,2}(t)\middle|\dots\middle|e^{\lambda_n t}R_{i,n}(t)\right]$$

ce qui est bien la formule à démontrer.

D'autre part il est immédiat que les $R_{i,k}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et T périodiques, car $Q(t)$ l'est, et donc aussi $\frac{1}{i!}Q(t)N^iP$.

17c. Posons $\lambda_k = -\alpha_k + i\beta_k$ avec $\alpha_k > 0$.
$\left|e^{\lambda_k t}t^i\right| = e^{-\alpha_k t}\,|t|^i \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Les $R_{i,k}$ étant continues et périodiques, elles sont bornées.
On a donc bien

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{t\to+\infty} Z_k(t) = 0$$

Comme les (Z_i) forment une base de $\mathscr{S}$, on obtient que toute fonction solution de 6 tend vers 0 en $+\infty$.

18.

18a. Déjà on peut remarquer que les valeurs propres de e^{TB} ne dépendent pas du choix de la base $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $\mathscr{S}$; cela nous permettra de choisir cette base de manière à ce que $M(0) = I$.
Soit donc $(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n)$ une autre base de $\mathscr{S}$. On peut trouver une matrice inversible C telle que

$$\tilde{M}(t) = M(t)C$$

Mais alors

$$\begin{aligned}(\tilde{M}(t))^{-1}\tilde{M}(t+T) &= C^{-1}(M(t))^{-1}M(t+T)C \\ &= C^{-1}e^{TB}C\end{aligned}$$

ce qui montre que les matrices e^{TB} et $e^{T\tilde{B}}$sont semblables et donc ont le même spectre.
On reprend le raisonnement de la question 15.
On a

$$\begin{aligned}M(T) &= M(0)e^{TB} \\ &= e^{TB} \qquad \text{(en choisissant les } Y_i \text{ comme dans la question 15.)}\end{aligned}$$

B admet pour valeur propre $\lambda = i\frac{2k\pi}{mT}$.
Soit alors U un vecteur propre de $M(T) = e^{TB}$ associé à la valeur propre $e^{\lambda T} = e^{i\frac{2k\pi}{m}}$.
Soit alors Y la solution de 6 telle que $Y(0) = U$.
On a:

$$\begin{aligned}&\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = e^{i\frac{2k\pi}{m}}Y(t) \\ \Rightarrow &\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+mT) = e^{mi\frac{2k\pi}{m}}Y(t) = Y(t)\end{aligned}$$

On a trouvé une solution non nulle et mT périodique.

18b. soit Y une solution non nulle mT périodique. On a

$$Y(0) = Y(mT) = (e^{TB})^m Y(0)$$

donc $Y(0)(\neq 0)$ est un vecteur propre de $(e^{TB})^m$, associé à la valeur propre 1.
Mais si on note le spectre de e^{TB}

$$\mathrm{Sp}(e^{TB}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

alors

$$\mathrm{Sp}(e^{mTB}) = \{\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m\}$$

ce qui prouve

$$\exists k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k^m = 1$$

19.

On a

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad A(t + kT')X(t) &= A(t + kT')X(t + kT') \\ &= X'(t + kT') \\ &= X'(t) \\ &= A(t)X(t) \end{aligned}$$

Aussi,

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad A(t + kT)X(t) = A(t)X(t)$$

Or $T\mathbb{Z} + T'\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
Il ne peut pas être de la forme $a\mathbb{Z}$, cela contredirait $T' \notin \mathbb{Q}T$. donc il est dense dans $\mathbb{R}$.
Par continuité de $t \mapsto A(t)$, on en déduit

$$\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2, \quad A(u)X(t) = A(t)X(t)$$

20.

Supposons qu'il existe une solution non nulle Y, T' périodique avec $T' = \frac{p}{q}T$.
Mais alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t + pT) &= Y(t + q\frac{p}{q}T) \\ &= Y(t + qT') \\ &= Y(t) \end{aligned}$$

Donc Y est pT périodique et d'après 18b, e^{TB} possède une valeur propre qui est une racine p-ième de l'unité.
Réciproquement, si e^{TB} possède une valeur propre qui est une racine m-ième de l'unité, on a prouvé dans la question 18a que 6 possède une solution mT périodique non nulle.
Supposons maintenant qu'il existe une solution non nulle Y, T' périodique avec $T' \notin \mathbb{Q}T$. D'après la question précédente,

$$\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2, \quad A(u)X(t) = X'(t) \tag{8}$$

considérons l'espace vectoriel:

$$F = \mathrm{vect}\{X(t), \quad t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^n$$

F est un sous espace vectoriel de dimension finie, donc fermé par un résultat classique.

soit $t \in \mathbb{R}$.

$$X'(t) = \lim_{u \to t} \underbrace{\frac{1}{u-t}(X(u) - X(t))}_{\in F} \in F$$

Mais donc l'équation 8 nous dit que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad A(u)(F) \subset F$$

Par hypothèse cela impose que $F = \mathbb{C}^n$, car X n'est pas la fonction nulle.

Si on fixe u dans l'équation 8, on voit par ailleurs que X est solution d'une équation à coefficients constants, que l'on sait résoudre:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(T) = e^{A(u)(t-t0)} X(t_0)$$

Mais cette formule est valable quelque soit u et t_0,

$$\begin{aligned}
&\forall (u, t_0, t) \in \mathbb{R}^3, \quad e^{A(u)(t-t0)} X(t_0) = e^{A(0)(t-t0)} X(t_0) \\
\Leftrightarrow \quad &\forall (u, t, t_0) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{tA(u)} X(t_0) = e^{tA(0)} X(t_0) \\
\Leftrightarrow &\forall (u, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall U \in \mathbb{C}^n, \quad e^{tA(u)} U = e^{tA(0)} U && \text{($F = \mathbb{C}^n$)} \\
\Leftrightarrow \quad &\forall (u, t) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{tA(u)} = e^{tA(0)} \\
\Leftrightarrow \quad &\forall u \in \mathbb{R}, \quad A(u) = A(0) && \text{(cf. 7b)}
\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière équivalence, on a appliqué le résultat de la question 7b à $E = M_n(\mathbb{C})$, $f = \exp$, $a = 0$ et on a choisit t suffisamment petit pour que $tA(0), tA(u) \in V$.

La matrice $A(t)$ est donc nécéssairement constante; mais réciproquemment une telle matrice ne peut pas satisfaire l'hypothèse de cette question puisqu'il suffit de considérer $V = \mathrm{vect}(U)$, où U est un vecteur propre[1].

Au final,

$$\begin{aligned}
&\text{L'équation 6 possède une solution périodique non nulle} \\
\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*, \quad &e^{TB} \text{ possède une valeur propre qui est une racine } m\text{-ième de l'unité}
\end{aligned}$$

21.

On considère l'équation différentielle:

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \tag{9}$$

Soit Y_0 un solution particulière de 9; par exemple prenons

$$\begin{aligned}
Y_0 : \mathbb{R} &\to \mathbb{C}^n \\
t &\mapsto M(t) \int_0^t (M(u))^{-1} b(u) \, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

La solution générale peut s'écrire:

$$Y(t) = M(t)C + Y_0(t)$$

[1] Sauf dans le cas trivial $n = 1$. Dans ce cas l'existence d'une solution non nulle périodique équivaut à $a \in i\mathbb{R}$. Vu le résultat que j'obtiens l'hypothèse de la question me parait excessive, mais c'est peut-être une erreur de ma part.

avec $C \in \mathbb{C}^n$.

On sait que quelque soit $t_0 \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned}\varphi_{t_0} : \mathscr{S} &\to \mathbb{C}^n \\ Y &\mapsto Y(t_0)\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Par ailleurs, comme précédemment on remarque que si Y est solution alors $t \mapsto Y(t+T)$ est aussi solution:

$$\begin{aligned}Y'(t+T) &= A(t+T)Y(t+T) + b(t+T) \\ &= A(t)Y(t+T) + b(t)\end{aligned}$$

Ainsi Y est une solution T périodique si et seulement si Y et $t \mapsto Y(t+T)$ coincident en 0:

$$\begin{aligned}Y \in \mathscr{S}\ T \text{ périodique} &\Leftrightarrow Y(T) = Y(0) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{M(0)}_{=I} C + Y_0(0) = M(T)C + Y_0(T) \\ &\Leftrightarrow Y_0(0) - Y_0(T) = (M(T) - I)C \\ &\Leftrightarrow Y_0(0) - Y_0(T) = (e^{TB} - I)C \\ &\Leftrightarrow (e^{TB} - I)^{-1}(Y_0(0) - Y_0(T)) = C \qquad \text{(1 n'est pas valeur propre de } e^{TB}\text{)}\end{aligned}$$

ce qui démontre l'existence et l'unicité de la solution de 9 T périodique.

22.

On étudie le système différentiel

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos t \\ \cos t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Soit $X' = AX$ avec

$$\begin{aligned}A(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -\cos t \\ \cos t & 1 \end{bmatrix} \\ &= I + \cos t \Upsilon\end{aligned}$$

en posant

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que

$$\int_0^t A(t)\,\mathrm{d}t = tI + \sin t \Upsilon$$

Cela montre que A commute avec sa primitive et donc

$$\left(e^{\int_0^t A(t)\,\mathrm{d}t}\right)' = A(t) e^{\int_0^t A(t)\,\mathrm{d}t}$$

Calculons cette exponentielle:

$$
\begin{aligned}
e^{\int_0^t A(t)\,\mathrm{d}t} &= e^{tI+\sin t\Upsilon} \\
&= e^{tI}e^{\sin t\Upsilon} && (I\Upsilon=\Upsilon I) \\
&= e^t e^{\sin t\Upsilon}
\end{aligned}
$$

On remarque que

$$
\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N},\quad \Upsilon^{2k} &= (-1)^k I \\
\Upsilon^{2k+1} &= (-1)^k\Upsilon
\end{aligned}
$$

ce qui permet de calculer facilement l'exponentielle:

$$
\begin{aligned}
e^{\sin t\Upsilon} &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\sin^{2k}(t)}{(2k)!}I+\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\sin^{2k+1}(t)}{(2k+1)!}\Upsilon \\
&= \cos(\sin t)I+\sin(\sin t)\Upsilon \\
&= \begin{bmatrix}\cos(\sin t) & -\sin(\sin t)\\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Au final

$$
\begin{aligned}
e^{\int_0^t A(t)\,\mathrm{d}t} &= e^t\begin{bmatrix}\cos(\sin t) & -\sin(\sin t)\\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t)\end{bmatrix} \\
&= M(t)
\end{aligned}
$$

Les solutions de 10 sont donc

$$
\mathscr{S}=\{t\mapsto e^t\begin{bmatrix}\cos(\sin t) & -\sin(\sin t)\\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t)\end{bmatrix}C,\quad C\in\mathbb{C}^2\}
$$

La matrice M est déja sous forme normale $T=2\pi$, $B=I_2$.

On représente figure 0 les trajectoires des solutions réelles, qui sont sur le cercle unité à $t=0$. Les deux solutions de notre base sont en noir.

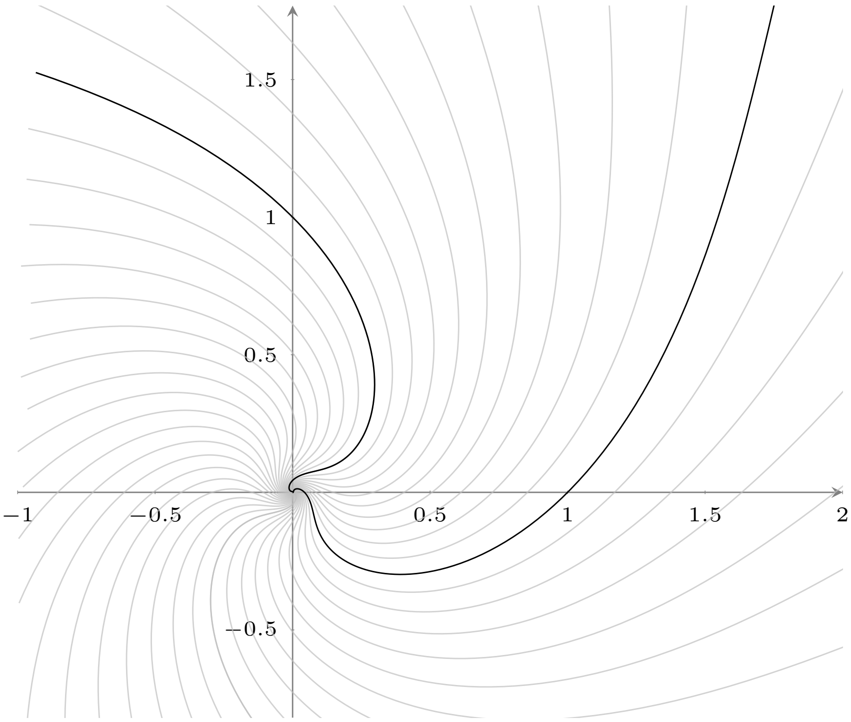

FIGURE 0. Représentation des trajectoires solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$