CONCOURS X ENS 2024
MATHÉMATIQUES A - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

1a. On considère la matrice suivante

$$M_x = \begin{bmatrix} x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $-M_0 - I_n$ est de rang 1; d'après le théorème du rang,

$$\dim \ker(-M_0 - I_n) = n - 1$$

La famille libre suivante, constituée de $n-1$ vecteurs propres associés à la valeur propre 1 (multiplier à droite par ces vecteurs colonnes a pour effet de faire la différence de deux colonnes contigües) est donc une base de $\ker(-M_0 - I_n)$:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'ordre de multiplicité (o_1) de 1 en tant que valeur propre de $-M_0$ est donc soit $n-1$ soit n.

Or si on pose:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

on a:

$$-M_0 u = -(n-1)u$$

En effet, multiplier à droite par le vecteur colonne u revient à faire la somme de toutes les colonnes de la matrice.

Cela montre que $-(n-1)$ $(\neq 1)$ est valeur propre de $-M_0$, d'ordre de multiplicité $o_{-(n-1)} \geqslant 1$

Comme d'autre part

$$o_1 + o_{-(n-1)} \leqslant n$$

On obtient, dans cet ordre,

- $o_1 + o_{-(n-1)} = n$ et donc le polynôme caractéristique de $-M_0$ est scindé sur $\mathbb{R}$: $\chi = (-1)^n (X-1)^{n-1}(X+n-1)$.
- $o_1 = n-1$ et $o_{-(n-1)} = 1$
- $\dim\ker(-M_0 - I_n) = o_1$ et $\dim\ker(-M_0 + (n-1)I_n) = 1 = o_{-(n-1)}$

et donc $-M_0$ est diagonalisable et on trouvé ses valeurs propres et une base pour chaque espace propre.

1b. Revenons à la définition du déterminant:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi(x) &= \det(-M_0 - xI_n) \\ &= (-1)^n \det(M_0 + xI_n) \\ &= (-1)^n \det(M_x) \\ &= (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (M_x)_{i,\sigma(i)} \end{aligned}$$

Or,

$$(M_x)_{i,j} = x \Leftrightarrow i = j$$

Donc,

$$\chi(x) = (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)=i}}^{n} x \prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)\neq i}}^{n} 1$$

$$\chi(x) = (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} \tag{1}$$

On a explicité χ dans la question précédente, ce qui permet d'écrire:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$$

2.

Si on prend $x = 1$ dans l'équation précédente:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) = 0 \tag{2}$$

Si on dérive l'équation précédente, et on prend la valeur en $x = 1$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\nu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } n > 2, \\ 2 & \text{if } n = 2. \end{cases}$$

on peut trouver une primitive du membre de droite:

$$\begin{aligned} \int (x-1)^{n-1}(x+n-1)\,\mathrm{d}x &= \int n(x-1)^{n-1}\,\mathrm{d}x + \int (x-1)^n\,\mathrm{d}x \\ &= (x-1)^n + \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1} + K \end{aligned}$$

Donc en intégrant toujours la même relation entre 0 et 1 on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\frac{1}{\nu(\sigma)+1}\,\mathrm{d}x &= (-1)^{n+1} + \frac{1}{n+1}(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

3.

D'après l'équation 2,

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} 1 - \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} 1 \\ \Leftrightarrow \qquad 0 &= \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = 1\} - \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = -1\} \\ \Leftrightarrow \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = 1\} &= \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = -1\} \end{aligned}$$

On en déduit que si on tire au hasard une permutation,

$$\begin{aligned} P(\varepsilon(\sigma) = \pm 1) &= \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = \pm 1\}}{\#\mathfrak{S}_n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.

Par définition,

$$\sigma \in \mathfrak{D}_n \Leftrightarrow \nu(\sigma) = 0$$

D'après 1, $(-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_n}$ est le coefficient constant de χ. On sait par ailleurs que $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$, donc

$$\begin{aligned} (0-1)^{n-1}(0+n-1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_n} \epsilon(\sigma) &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{D}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} 1 - \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{D}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} 1 \\ \Leftrightarrow \qquad (-1)^{n-1}(n-1) &= \#\{\sigma \in \mathfrak{D}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = 1\} - \#\{\sigma \in \mathfrak{D}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = -1\} \end{aligned}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & & & & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ \binom{i}{0} & \binom{i}{1} & \binom{i}{2} & \cdots & \binom{i}{i-1} & \binom{i}{i} & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ \binom{m-1}{0} & \cdots & & & & \binom{m-1}{m-2} & \binom{m-1}{m-1} & \\ \binom{m}{0} & \cdots & & & & \binom{m}{m-2} & \binom{m}{m-1} & \binom{m}{m} \end{bmatrix}$$

5.

5a. Les familles $(1, X, \ldots, X^m)$ et $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ sont des familles de $m+1 = \dim \mathbb{R}_m[X]$ polynômes de degré échelonnés; ce sont donc des familles libres et par suite deux bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5b. Il s'agit d'écrire X^i comme une combinaison linéaire de $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$; or d'après le binome de Newton,

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (X-1)^k = (X-1+1)^i = X^i$$

ce qui montre que la ligne $i+1$ de M contient les coordonnées de X^i dans la base $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$, ou encore que M^T est la matrice de l'identité de $\mathbb{R}_m[X]$ dans les bases $(1, X, \ldots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.

5c. L'identité étant une bijection, la matrice M^T et donc M sont inversibles et $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$ est la matrice de l'application identité dans les bases $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ au départ et $(1, X, \ldots, X^m)$ à l'arrivée. Toujours d'après la formule du binome de Newton,

$$(X-1)^i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} X^k$$

On en déduit

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & & & & & & \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \mathbf{0} & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ (-1)^i\binom{i}{0} & (-1)^{i-1}\binom{i}{0} & \cdots & -\binom{i}{i-1} & \binom{i}{i} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ (-1)^{m-1}\binom{m-1}{0} & \cdots & & & -\binom{m-1}{m-2} & \binom{m-1}{m-1} & \\ (-1)^m\binom{m}{0} & \cdots & & & \binom{m}{m-2} & -\binom{m}{m-1} & \binom{m}{m} \end{bmatrix}$$

5d. Si on pose:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ v_m \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} & \forall k \leqslant m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} v_\ell \\ \Leftrightarrow \quad & U = M^T V \\ \Leftrightarrow \quad & (M^T)^{-1} U = V \\ \Leftrightarrow & \forall k \leqslant m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} u_\ell \end{aligned}$$

6.

On applique la formule d'inversion de la question précédente à $u_k = \#\mathfrak{S}_k$ et $v_\ell = \#\mathfrak{D}_\ell$; en effet, on peut dénombrer le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_m$ qui ont exactement $m - \ell \leqslant m$ points fixes en fonction de v_l:

$$\text{nombre de façons de choisir les } m-l \text{ points fixes} \\ \times \text{ nombres de façons de permuter les } \ell \text{ éléments restants sans points fixes} = \binom{m}{m-\ell} v_\ell = \binom{m}{\ell} v_\ell$$

En sommant pour $l = 0$ à k,

$$\begin{aligned}
\forall k \leqslant n, \quad k! = u_k &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} v_\ell \\
\Rightarrow \qquad v_n = D_n &= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} u_\ell \\
\Leftrightarrow \qquad D_n &= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} \ell! \\
\Leftrightarrow \qquad D_n &= n! \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} \frac{1}{(n-\ell)!} \\
\Leftrightarrow \qquad D_n &= n! \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \frac{1}{\ell!}
\end{aligned}$$

7.

7a. Let us divide the equation 3 by $D_n = \#\mathfrak{D}_\mathfrak{n}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n} = \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{D}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = 1\}}{D_n} - \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{D}_n, \quad \varepsilon(\sigma) = -1\}}{D_n} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n} = P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n} = P(Y_n = 1) - (1 - P(Y_n = 1)) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n} = 2P(Y_n = 1) - 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n} + 1) = P(Y_n = 1)
\end{aligned}$$

On en déduis

$$\begin{aligned}
P(Y_n = -1) &= 1 - P(Y_n = 1) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{(-1)^{n}(n-1)}{D_n} + 1)
\end{aligned}$$

7b. On sait que $\frac{D_n}{n!}$ converge et

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n!} &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^{\ell} \frac{1}{\ell!} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}$$

d'où

$$D_n \underset{+\infty}{\sim} e^{-1} n!$$

Cela montre que les probabilités précedentes convergent et

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$$

8.

8a. Dans la question 6, on a dénombré le nombre de permutations ayant exactement k points fixes; on en déduis

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(Z_n = k) &= \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \nu(\sigma) = k\}}{\#\mathfrak{S}_n} \\ &= \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^\ell \frac{1}{\ell!}\end{aligned}$$

8b. La série précédente converge, donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

8c.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(Z_n = k) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Z_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (P(Z_n = k-1) - \frac{1}{(k-1)!} \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(Z_n = k-1) - \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{n-k+1} (-1)^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(Z_n = k-1) - \frac{1}{n!} \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^\ell \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(Z_n = k-1) - \frac{1}{n!}((1-1)^{n+1} - 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(Z_n = k) + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{P(Z_n=n)} \\ &= 1\end{aligned}$$

Le nombre moyen de points fixes est $E(Z_n) = 1$.
Donc aussi

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = 1$$

9.

Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}\omega(\sigma) &= \frac{1}{2}\left(\omega(\mathrm{id}) + \omega\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2}(2+1)\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

pour $n = 3$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\omega(\sigma) &= \frac{1}{6}\left(\omega(\mathrm{id}) + \omega\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{6}(3 + 3\times 2 + 2\times 1)\\ &= \frac{11}{6}\end{aligned}$$

Pour $n = 4$, il y a

- $\binom{4}{2} = 6$ transpositions pour lesquels $\omega = 3$.
- $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$ produits de deux transpositions à supports disjoints, pour lesquels $\omega = 2$.
- $2\binom{4}{3} = 8$ cycles de longueur 3 pour lesquels $\omega = 2$.
- 6 cycles de longueur 4 pour lesquels $\omega = 1$.
- l'identité pour laquelle $\omega = 4$.

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4}\omega(\sigma) &= \frac{1}{24}(4 + 6\times 1 + 8\times 2 + 3\times 2 + 6\times 3)\\ &= \frac{25}{12}\end{aligned}$$

10.

$$\omega(\sigma) = n \Leftrightarrow \sigma = (id)$$

donc $s(n,n) = 1$.

$$\omega(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma \text{ est un cycle de longueur } n$$

donc $s(n,1) = (n-1)!$.

soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Si $\sigma(1) = 1$ et $\omega(\sigma) = k$, alors la restriction de σ à $[\![2,n]\!]$ induit une permutation de $[\![1,n-1]\!]$ telle que $\omega = k-1$. Autrement dit il existe une bijection

$$\varphi : \{\sigma\in\mathfrak{S}_n, \quad \sigma(1) = 1 \wedge \omega(\sigma) = k\} \to \{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}, \quad \omega(\sigma) = k-1\}$$

Si $\sigma(1) \neq 1$, alors posons $j = \sigma(1) \in [\![2,n]\!]$ et soit τ la transposition échangeant 1 et j. Alors $\tau\circ\sigma$ est une permuation de $[\![2,n]\!]$ telle que $\omega = k$. autrement dit il existe une bijection

$$\psi_j : \{\sigma\in\mathfrak{S}_n, \quad \sigma(1) = j \wedge \omega(\sigma) = k\} \to \{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}, \quad \omega(\sigma) = k\}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
s(n,k) &= \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \omega(\sigma) = k\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma(1) = j \wedge \omega(\sigma) = k\} \\
&= \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma(1) = 1 \wedge \omega(\sigma) = k\} + \sum_{j=2}^{n} \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma(1) = j \wedge \omega(\sigma) = k\} \\
&= \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}, \quad \omega(\sigma) = k-1\} + (n-1)\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}, \quad \omega(\sigma) = k\} \\
s(n,k) &= s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)
\end{aligned}$$

11.

Soit $n \geqslant 2$. On peut écrire:

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = x\prod_{i=0}^{n-2}(x+i) + (n-1)\prod_{i=0}^{n-2}(x+i)$$

Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, le coefficient $\tilde{s}(n,k)$ de x^k dans $\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$ est la somme

- du coefficient de x^{k-1} dans $\prod_{i=0}^{n-2}(x+i)$, soit $\tilde{s}(n-1,k-1)$
- et du coefficient de x^k dans $\prod_{i=0}^{n-2}(x+i)$ multiplié par $n-1$, soit $(n-1)\tilde{s}(n-1,k)$.

On a donc:

$$\forall k \in [\![2, n-1]\!], \quad \tilde{s}(n,k) = \tilde{s}(n-1,k-1) + (n-1)\tilde{s}(n-1,k)$$

De plus le coefficient de x^n est $1 = \tilde{s}(n,n)$, celui de x est $\tilde{s}(n,1) = (n-1)!$.

La suite $\tilde{s}$ vérifie la même équation de récurrence que s, avec les mêmes conditions initiales, cela ne pose pas de problème pour montrer par récurrence que $\tilde{s}(n,k) = s(n,k)$, ou encore:

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$$

12.

Déjà remarquons que

$$\begin{aligned}
E[X_n] &= \sum_{k=1}^{n} kP(\omega(\sigma) = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{s(n,k)}{n!} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} ks(n,k) \\
&= \frac{1}{n!}Q'(1)
\end{aligned}$$

où

$$Q = \prod_{i=0}^{n-1}(X+i)$$

Or,

$$Q' = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} (X+i)$$

donc,

$$\begin{aligned}
E[X_n] &= \frac{1}{n!} Q'(1)\\
&= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} (1+i)\\
&= \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} i\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

13.

13a. On a

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = Q''(1)$$

et

$$Q'' = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{n-1} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq l,j}}^{n-1} (X+i)$$

Donc

$$\begin{aligned}
Q''(1) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{n-1} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq l,j}}^{n-1} (1+i)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{n-1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l+1,j+1}}^{n} i \qquad \big(\text{changement d'indice } i \leftarrow i+1\big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l,j}}^{n} i \qquad \big(\text{changement d'indice } \ell \leftarrow \ell+1, j \leftarrow j+1\big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{n} \frac{n!}{\ell j}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n!}{\ell j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j^2}
\end{aligned}$$

On a bien finalement

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) &= \frac{1}{n!}Q''(1)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\end{aligned}$$

13b. C'est une astuce habituelle: on écrit

$$k^2 = k(k-1) + k$$

de manière à ce que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} ks(n,k) + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k)\\ &= E[X_n] + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\end{aligned}$$

14.

14a.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1} s^n(n,k)k^2\\ &= E[X_n] + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} && \text{(cf. question 13b)}\\ &= \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n}) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} && \text{(cf. question 12)}\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell j} &= (\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j})^2\\ &= \ln^2 n + 2\gamma\ln n + \gamma^2 + O(\frac{\ln n}{n})\end{aligned}$$

De plus,

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}$$

Une comparaison série-intégrale permet d'obtenir

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{1}{j^2} \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n}) = O(\frac{\ln n}{n})$$

donc finalement on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 \underset{n\to+\infty}{=} \ln^2 n + (2\gamma+1)\ln n + \gamma^2 + \gamma - \frac{\pi^2}{6} + O(\frac{\ln n}{n})$$

14b.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln n)^2 &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2-2\ln n\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)+\frac{\ln^2 n}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}1\\ &= \ln^2 n+(2\gamma+1)\ln n+\gamma^2+\gamma-\frac{\pi^2}{6}+O(\frac{\ln n}{n})-2\ln n(\ln n+\gamma+O(\frac{1}{n}))+\ln^2 n\\ &= \ln n+\gamma^2+\gamma-\frac{\pi^2}{6}+O(\frac{\ln n}{n})\end{aligned}$$

15.

Il faut remarquer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln n)^2 = E[(X_n-\ln n)^2]$$

La question précédente prouve l'existence de $C>0$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad E[(X_n-\ln n)^2]\leqslant C\ln n$$

Soit $\epsilon>0$.On applique alors l'inégalité de Markov à cette variable aléatoire:

$$\forall n\geqslant 2,\quad P(|X_n-\ln n|\geqslant\epsilon\ln n)\leqslant\frac{E[(X_n-\ln n)^2]}{\epsilon^2\ln^2 n}\leqslant\frac{C}{\epsilon^2\ln n}$$

Cela montre que la VA $\frac{X_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers 1.

16.

On remarque que la fonction A est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et même constante sur chaque intervalle $[n,n+1[,\quad n\in\mathbb{Z}$.

$$\forall t\in\,]-\infty,2[,\quad A(t)=0$$
$$\forall n\geqslant 2\quad\forall t\in[n,n+1[,\quad A(t)=\sum_{k=2}^{n}a_k$$

La fonction $t \mapsto b'(t)A(t)$ est donc intégrable sur le segment $[2, n]$, et

$$\begin{aligned}
\int_2^n b'(t)A(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} b'(t)A(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} b'(t) \left(\sum_{j=2}^{k} a_j \right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{k} a_j \int_k^{k+1} b'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{k} a_j (b(k+1) - b(k)) \\
&= \sum_{j=2}^{n-1} a_j \sum_{k=j}^{n-1} (b(k+1) - b(k)) \\
&= \sum_{j=2}^{n-1} a_j (b(n) - b(j)) \\
&= \left(\sum_{j=2}^{n-1} a_j \right) b(n) - \sum_{j=2}^{n-1} a_j b(j) \\
&= \left(\sum_{j=2}^{n-1} a_j \right) b(n) + a_n b(n) - a_n b(n) - \sum_{j=2}^{n-1} a_j b(j) \\
&= \left(\sum_{j=2}^{n} a_j \right) b(n) - \sum_{j=2}^{n} a_j b(j)
\end{aligned}$$

$$\int_2^n b'(t)A(t)\,\mathrm{d}t = A(n)b(n) - \sum_{j=2}^{n} a_j b(j)$$

17.

17a.

$$\prod_{\substack{p \leqslant 1 \\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\varnothing} = 1 \leqslant 4 = 4^1$$

$$\prod_{\substack{p \leqslant 2 \\ p \text{ premier}}} p = 2 \leqslant 16 = 4^2$$

$$\prod_{\substack{p \leqslant 3 \\ p \text{ premier}}} p = 6 \leqslant 64 = 4^3$$

17b. Supposons $n = 2m \geqslant 4$ et le résultat connu au rang k, pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$n = 2m$ n'étant pas premier,

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p &= \prod_{\substack{p\leqslant n-1\\ p \text{ premier}}} p\\ &\leqslant 4^{n-1} < 4^n\end{aligned}$$

et le résultat est vrai au rang n.

17c. Soit $m+1 < p \leqslant 2m+1$ premier.
On a

$$p \mid (2m+1)\times 2m \times \cdots \times (m+1) = m!\binom{2m+1}{m}$$

Mais comme $p > m$,

$$\forall k \leqslant m, \quad p \nmid k$$

et donc comme p premier, $p \wedge m! = 1$. D'après le théorème de Gauss, $p \mid \binom{2m+1}{m}$.
Toujours d'après le théorème de Gauss, on a

$$\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1\\ p \text{ premier}}} \mid \binom{2m+1}{m}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\binom{2m+1}{m} &= \frac{\prod_{k=1}^m (2k+1)\prod_{k=1}^m 2k}{m!(m+1)!}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^m (2k+1)2^m m!}{m!(m+1)!}\\ &= 2^m\frac{\prod_{k=1}^m (2k+1)}{(m+1)!}\\ &\leqslant 2^m\frac{\prod_{k=1}^m (2k+2)}{(m+1)!}\\ &= 4^m\frac{\prod_{k=1}^m (k+1)}{(m+1)!}\\ &= 4^m\end{aligned}$$

17d. Supposons $n = 2m+1 \geqslant 4$ et le résultat connu au rang k, pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p &= \prod_{\substack{p\leqslant m+1\\ p \text{ premier}}} p \prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1\\ p \text{ premier}}} p\\ &\leqslant 4^{m+1}\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1\\ p \text{ premier}}} p && \text{(H.R.)}\\ &\leqslant 4^{m+1}4^m && \text{(cf. 17c)}\\ &= 4^n\end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré par récurrence sur n.

18.

Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned}\nu_p(n!) &= \sum_{k=2}^{n} \nu_p(k) \\ &= \sum_{j=1}^{q} j \times \#\{k \in [\![2,n]\!], \quad \nu_p(k) = j\} \qquad \text{(}q\text{ est le plus grand entier tel que } p^q \leqslant n.\text{)} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} j \times \#\{k \in [\![2,n]\!], \quad \nu_p(k) = j\}\end{aligned}$$

Or,

$$\nu_p(k) = j \Leftrightarrow p^j \mid k \wedge p^{j+1} \nmid k$$

Il y a $\lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor$ multiples de p^j dans $[\![2,n]\!]$, auxquels on retranche les $\lfloor \frac{n}{p^{j+1}} \rfloor$ multiples de p^{j+1}.
donc on a

$$\begin{aligned}\nu_p(n!) &= \sum_{j=1}^{q} j \times (\lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor - \lfloor \frac{n}{p^{j+1}} \rfloor) \\ &= \sum_{j=1}^{q} j \times \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor - \sum_{j=1}^{q} j \lfloor \frac{n}{p^{j+1}} \rfloor \\ &= \sum_{j=1}^{q} j \times \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor - \sum_{j=2}^{q+1} (j-1) \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor \qquad \text{(changement d'indice } j \leftarrow j+1\text{)} \\ &= \sum_{j=1}^{q} \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor - q \lfloor \frac{n}{p^{q+1}} \rfloor \\ \nu_p(n!) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor \qquad (\ \forall j > q, \quad \lfloor \tfrac{n}{p^j} \rfloor = 0)\end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$\lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor \leqslant \frac{n}{p^j}$$

en sommant on a:

$$\begin{aligned}\frac{n}{p} - 1 < \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor \leqslant n \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{p^j} \\ = n \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{p^j} \\ = \frac{n}{p-1} \\ = \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}\end{aligned} \tag{3}$$

19.

19a. Par croissance de $x \mapsto \ln x$,

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad \int_{k-1}^{k} \ln x \,\mathrm{d}x \leqslant \ln k \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln x \,\mathrm{d}x$$

En sommant on obtient:

$$\begin{aligned}
&\int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x &&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant &&\int_2^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & n \ln n - n &&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant &&(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 \\
\Leftrightarrow\ & && 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k - (n \ln n - n) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (n\ln n - n) - 2\ln 2
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (n \ln n - n) &= n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1 + \ln(n+1) \\
&= 1 + O(\frac{1}{n}) - 1 + \ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln n \\
&= \ln n + O(\frac{1}{n}) \\
&= O(\ln n)
\end{aligned}$$

On a donc prouvé le développement asymptotique suivant:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \underset{n \to +\infty}{=} n \ln n - n + O(\ln n)$$

19b. L'écriture

$$n! = \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$$

découle directement de la décomposition en facteurs premiers de $n!$, puisque tout les facteurs premiers de $n!$ sont $\leqslant n$ puisqu'ils divisent un entier $\leqslant n$.

On peut alors écrire:

$$\ln n! = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \nu_p(n!) \ln p$$

puis utiliser l'encadrement 3:

$$n \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \ln p < \ln n! \leqslant n \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

D'après la question 17,

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \ln p \leqslant n \ln 4$$

ce qui permet de conclure:

$$n \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - n \ln 4 < \ln n! \leqslant n \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p(p-1)} \tag{4}$$

19c.

$$0 \leqslant \frac{\ln n}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$$

c'est le terme général d'une série de Bertrand $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ avec $\alpha > 1$, donc la série converge.

19d.

$$0 \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p(p-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k(k-1)}$$

donc toujours d'après les théorèmes de comparaisons des séries à termes positifs, $\sum_{p \text{ premier}} \frac{\ln p}{p(p-1)}$ converge.

En divisant par n l'encadrement 4 et en réorganisant on obtient:

$$-\ln 4 < \frac{\ln n!}{n} - \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

Cela montre que

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{\ln n!}{n} + O(1)$$

Il faut utiliser la question 19a:

$$\begin{aligned} \frac{\ln n!}{n} &\underset{n \to +\infty}{=} \ln n - 1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &\underset{n \to +\infty}{=} \ln n + O(1) \end{aligned}$$

On a finalement prouvé:

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + O(1)$$

20.

20a. On applique la question 16 avec

$$A(t) = \sum_{\substack{p \leqslant t \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p}$$

C'est possible il suffit de prendre

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ n'est pas premier,} \\ \dfrac{\ln k}{k} & \text{si } k \text{ premier.} \end{cases}$$

Et on prend

$$b(t) = \frac{1}{\ln t}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p}\frac{1}{\ln p} = \frac{1}{\ln n}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} + \int_2^n \frac{A(t)}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow\quad &\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = \frac{A(n)}{\ln n} + \int_2^n \frac{A(t)}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On s'occupe maintenant du deuxième terme de $R(t)$. On a

$$\begin{aligned}
\int_2^n \frac{\ln t}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t &= \int_2^n \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t\\
&= \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)
\end{aligned}$$

On a bien finalement:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = \frac{R(n)+\ln n}{\ln n} + \int_2^n \frac{R(t)+\ln t}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \frac{R(n)}{\ln n} + \int_2^n \frac{R(t)}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \qquad (5)
\end{aligned}$$

20b. Encadrons $R(t)$ sur un intervalle $[n, n+1[$;

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \ln(n+1) \leqslant R(t) \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n+1\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \ln n$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \ln(n+1) &= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \ln n - \ln(1+\frac{1}{n})O(\frac{1}{n})\\
&= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \ln n + O(\frac{1}{n})\\
&= O(1) \qquad \text{(cf. 19d)}
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\leqslant n+1\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \ln n &\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \ln n + \frac{\ln(n+1)}{n+1}\\
&= O(1) \qquad \text{(cf. 19d)}
\end{aligned}$$

Cela montre que la fonction R est bornée.

Mais alors on a

$$\forall t \geqslant 2, \quad \left|\frac{R(t)}{t\ln^2 t}\right| \leqslant M\frac{1}{t\ln^2 t}$$

c'est la fonction d'une intégrale de Bertrand convergente $\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$, avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$. D'après les théorèmes de comparaison, $t \mapsto \frac{R(t)}{t\ln^2 t}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

20c.

$$\begin{aligned}\left|\int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t - \int_2^{n}\frac{R(t)}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_n^{+\infty}\frac{R(t)}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant M\int_n^{+\infty}\frac{1}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= M\frac{1}{\ln n} \\ &= O(\frac{1}{\ln n})\end{aligned}$$

On a de plus

$$\frac{R(n)}{\ln n} = O(\frac{1}{\ln n})$$

Si on reprend maintenant le développement asymptotique 5,

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p} = \ln(\ln n) + \underbrace{1 + \int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t - \ln(\ln 2)}_{=c_1} + O(\frac{1}{\ln n}) \tag{6}$$

21.

21a.

$$n \equiv 0 \pmod q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \quad n = kq$$

puis

$$\begin{aligned}n \in [1, x] &\Leftrightarrow 1 \leqslant kq \leqslant x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{q} \leqslant k \leqslant \frac{x}{q} \\ &\Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant \lfloor\frac{x}{q}\rfloor \qquad \text{(car } q \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

On en déduis

$$\#\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x], \quad n \equiv 0 \pmod q\} = \lfloor\frac{x}{q}\rfloor$$

et

$$0 \leqslant \frac{x}{q} - \#\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x], \quad n \equiv 0 \pmod q\} = \frac{x}{q} - \lfloor\frac{x}{q}\rfloor \leqslant 1$$

21b.

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p\mid n\\ p \text{ premier}}} 1\\ &= \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}}\sum_{\substack{n\equiv 0 \pmod p\\ n\leqslant x}} 1\\ &= \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}} \lfloor \frac{x}{p}\rfloor\\ &= \sum_{\substack{p\leqslant \lfloor x\rfloor\\ p \text{ premier}}} \lfloor \frac{x}{p}\rfloor\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}0\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant \lfloor x\rfloor\\ p \text{ premier}}} \frac{x}{p}-\sum_{n\leqslant x}\omega(n) &= \sum_{\substack{p\leqslant \lfloor x\rfloor\\ p \text{ premier}}} (\frac{x}{p}-\lfloor\frac{x}{p}\rfloor)\\ &\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant \lfloor x\rfloor\\ p \text{ premier}}} 1\\ &\leqslant x\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) &\underset{x\to\infty}{=} \sum_{\substack{p\leqslant \lfloor x\rfloor\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}+O(1)\\ &= \ln(\ln\lfloor x\rfloor)+O(1) \qquad \text{(cf. 6)}\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\ln(\ln(x-1)) < \quad &\ln(\ln\lfloor x\rfloor) \quad \leqslant \ln(\ln x)\\ \Rightarrow \ln(\frac{\ln(x-1)}{\ln x}) < &\ln(\ln\lfloor x\rfloor)-\ln(\ln x)\leqslant 0\end{aligned}$$

On a:

$$\frac{\ln(x-1)}{\ln x} = 1+\frac{\ln(1-\frac{1}{x})}{\ln x}\underset{x\to+\infty}{\to} 1$$

ainsi $\ln(\ln\lfloor x\rfloor)-\ln(\ln x)=o(1)$ et on a bien

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)\underset{x\to\infty}{=}\ln(\ln x)+O(1)$$

22.

22a.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln(\ln x))^2 &= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - 2\frac{1}{x}\ln(\ln x)\sum_{n\leqslant x}\omega(n) + \frac{1}{x}\ln^2(\ln x)\sum_{n\leqslant x}1 \\
&\underset{x\to\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - 2\ln^2(\ln x) + O(\ln(\ln x)) + \frac{\lfloor x\rfloor}{x}\ln^2(\ln x) \\
&\underset{x\to\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - 2\ln^2(\ln x) + \ln^2(\ln x) - \ln^2(\ln x) + \frac{\lfloor x\rfloor}{x}\ln^2(\ln x) + O(\ln(\ln x)) \\
&\underset{x\to\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - \ln^2(\ln x) - (1-\frac{\lfloor x\rfloor}{x})\ln^2(\ln x) + O(\ln(\ln x))
\end{aligned}$$

Or,

$$(1-\frac{\lfloor x\rfloor}{x})\ln(\ln x) = \underbrace{(x-\lfloor x\rfloor)}_{\in[0,1[}\underbrace{\frac{\ln(\ln x)}{x}}_{\underset{x\to+\infty}{\to 0}} \quad \underset{x\to+\infty}{\to 0}$$

ce qui montre:

$$(1-\frac{\lfloor x\rfloor}{x})\ln^2(\ln x) = o(\ln(\ln x))$$

finalement, on a bien:

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln(\ln x))^2 \underset{x\to\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - \ln^2(\ln x) + O(\ln(\ln x)) \tag{7}$$

22b. C'est une simple inversion de sommes.

$$\begin{aligned}
\omega(n)^2 &= (\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} 1)^2 \\
&= \sum_{\substack{p_1\leqslant n\\ p_1 \text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant n\\ p_2 \text{ premier}}} 1
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p_1\leqslant n\\ p_1 \text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant n\\ p_2 \text{ premier}}} 1 \\
&= \sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1 \text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2 \text{ premier}}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_1|n\wedge p_2|n}} 1 \\
&= \sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1 \text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2 \text{ premier}}} \#\{n\in[1,x]\cap\mathbb{N}, \quad p_1 \mid n \wedge p_2 \mid n\}
\end{aligned}$$

22c. Soit $(p_1,p_2)\in[1,x]^2$, $p_1\neq p_2$. Soit $n\in[1,x]\cap\mathbb{N}$. D'après le théorème de Gauss:

$$p_1 \mid n \wedge p_2 \mid n \Leftrightarrow p_1p_2 \mid n$$

et en particulier dans ce cas $p_1p_2 \leqslant x$.

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}} \#\{n\in[1,x]\cap\mathbb{N},\quad p_1\mid n\wedge p_2\mid n\} &= \sum_{\substack{p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}} \#\{n\in[1,x]\cap\mathbb{N},\quad p_1p_2\mid n\}\\ &= \sum_{\substack{p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}} \lfloor\frac{x}{p_1p_2}\rfloor \qquad \text{(cf. question 21a)}\end{aligned}$$

On encadre la partie entière pour obtenir:

$$x\sum_{\substack{p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2}-\sum_{\substack{p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}1<\sum_{\substack{p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}\lfloor\frac{x}{p_1p_2}\rfloor\leqslant x\sum_{\substack{p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2} \tag{8}$$

On peut faire la majoration suivante:

$$\begin{aligned}0\leqslant \sum_{\substack{p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}1 &= \sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1 \text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant \frac{x}{p_1}\\ p_2\neq p_1 \text{ premier}}}1\\ &\leqslant \sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1 \text{ premier}}}\omega(\lfloor\frac{x}{p_1}\rfloor)\\ &\leqslant \sum_{n\leqslant x}\omega(n)\\ &\underset{x\to\infty}{=} x\ln(\ln x)+O(x) \qquad \text{(cf. question 21b)}\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant \sqrt{x}\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2}\leqslant\sum_{\substack{p_1p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2}\leqslant\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2}$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2} &= (\sum_{\substack{p\leqslant\lfloor x\rfloor\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p})^2-\underbrace{\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p^2}}_{\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}\\ &\underset{x\to\infty}{=} \ln^2(\ln\lfloor x\rfloor)+O(\ln(\ln x)) \qquad \text{(cf. question 20c)}\\ &\underset{x\to\infty}{=} \ln^2(\ln x)+O(\ln(\ln x)) \qquad \text{(même raisonnement qu'en 21b)}\end{aligned}$$

On peut alors conclure en revenant à l'encadrement 8:

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}}\#\{n\in[1,x]\cap\mathbb{N},\quad p_1\mid n\wedge p_2\mid n\}\underset{x\to\infty}{=} x\ln^2(\ln x)+O(x\ln(\ln x)) \tag{9}$$

22d. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 &= \frac{1}{x}\sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1 \text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2 \text{ premier}}} \#\{n\in[1,x]\cap\mathbb{N},\quad p_1\mid n\wedge p_2\mid n\}\\
&= \frac{1}{x}\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premier}}} \#\{n\in[1,x]\cap\mathbb{N},\quad p_1\mid n\wedge p_2\mid n\}\\
&\qquad -\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}} \#\{n\in[1,x]\cap\mathbb{N},\quad p\mid n\}\\
&\underset{x\to\infty}{=} \ln^2(\ln x)+O(\ln(\ln x))-\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}} \#\{n\in[1,x]\cap\mathbb{N},\quad p\mid n\} && \text{(cf. equation 9)}\\
&\underset{x\to\infty}{=} \ln^2(\ln x)+O(\ln(\ln x))-\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}} \lfloor\frac{x}{p}\rfloor && \text{(cf. equation 21a)}\\
&\underset{x\to\infty}{=} \ln^2(\ln x)+O(\ln(\ln x)) && \text{(encadrer partie entière puis cf. 21b, 20c)}
\end{aligned}$$

On peut maintenant conclure avec l'équation 7:

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln(\ln x))^2 \underset{x\to\infty}{=} O(\ln(\ln x)) \tag{10}$$

23.

On considère l'ensemble:

$$\mathscr{S}=\{n\geqslant 3,\quad \left|\frac{\omega(n)-\ln(\ln n)}{\sqrt{\ln(\ln n)}}\right|\geqslant(\ln(\ln n))^{\frac{1}{4}}\}$$

Comme suggéré dans l'énoncé on écrit

$$\begin{aligned}
\#\{\mathscr{S}\cap[1,x]\} &= \#\{\mathscr{S}\cap[1,\sqrt{x}[\}+\#\{\mathscr{S}\cap[\sqrt{x},x]\}\\
&= O(\sqrt{x})+\#\{\mathscr{S}\cap[\sqrt{x},x]\}
\end{aligned}$$

cela montre déjà que

$$\frac{1}{x}\#\{\mathscr{S}\cap[1,x]\}\underset{x\to+\infty}{\to}0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\#\{\mathscr{S}\cap[\sqrt{x},x]\}\underset{x\to+\infty}{\to}0$$

Comme

$$\ln(\ln\sqrt{x})=\ln(\ln x)-\ln 2$$

On a, par croissance de $x\mapsto\ln(\ln x)$:

$$\forall n\in[\sqrt{x},x],\quad |\ln(\ln n)-\ln(\ln x)|\leqslant\ln 2$$

puis

$$\forall n \in [\sqrt{x}, x] \cap \mathscr{S}, \quad \begin{aligned} |\omega(n) - \ln(\ln x)| &\geqslant |\omega(n) - \ln(\ln n)| - \ln 2 \\ &\geqslant \ln^{\frac{3}{4}}(\ln n) - \ln 2 \end{aligned}$$

maintenant, avec l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned} \left|\ln^{\frac{3}{4}}(\ln n) - \ln^{\frac{3}{4}}(\ln x)\right| &\leqslant \frac{3}{4}\,|\ln(\ln n) - \ln(\ln x)| \qquad \text{(dès que } \ln(\ln\sqrt{x}) \geqslant 1) \\ &\leqslant \frac{3}{4}\ln 2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in [\sqrt{x}, x] \cap \mathscr{S}, \quad \begin{aligned} |\omega(n) - \ln(\ln x)| &\geqslant \ln^{\frac{3}{4}}(\ln x) - \frac{3}{4}\ln 2 - \ln 2 \\ &\geqslant \ln^{\frac{3}{4}}(\ln x) - \frac{7}{4}\ln 2 \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que

$$\frac{1}{x}\#\{\mathscr{S} \cap [\sqrt{x}, x]\} \underset{x\to+\infty}{\not\to} 0$$

Soit alors $\epsilon > 0$ et $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$ telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{x_m}\#\{\mathscr{S} \cap [\sqrt{x_m}, x_m]\} \geqslant \epsilon$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} \frac{1}{x_m}\sum_{n\leqslant x_m}(\omega(n) - \ln(\ln x_m))^2 &\geqslant \frac{1}{x_m}\sum_{n\in[\sqrt{x_m}, x_m]\cap\mathscr{S}}(\omega(n) - \ln(\ln x_m))^2 \\ &\geqslant \frac{1}{x_m}\sum_{n\in[\sqrt{x_m}, x_m]\cap\mathscr{S}}(\ln^{\frac{3}{4}}(\ln x_m) - \frac{7}{4}\ln 2)^2 \\ &= \frac{1}{x_m}\#\{\mathscr{S} \cap [\sqrt{x_m}, x_m]\}(\ln^{\frac{3}{4}}(\ln x_m) - \frac{7}{4}\ln 2)^2 \\ &\geqslant \epsilon(\ln^{\frac{3}{4}}(\ln x_m) - \frac{7}{4}\ln 2)^2 \end{aligned}$$

Comme par ailleurs

$$(\ln^{\frac{3}{4}}(\ln x) - \frac{7}{4}\ln 2)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln^{\frac{3}{2}}(\ln x)$$

cela contredit le résultat de la question 22d.

On peut donc conclure:

Theorème A.

$$\omega(n) = \#\{p \text{ premier}, \quad p \mid n\} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$$

sauf sur un ensemble $\mathscr{S}$ de densité nulle.

Remarque. On aurait abouti à la même conclusion en considérant n'importe quel ensemble de la forme:

$$\mathscr{S}_\alpha = \{n \geqslant 3, \quad \left|\frac{\omega(n) - \ln(\ln n)}{\sqrt{\ln(\ln n)}}\right| \geqslant (\ln(\ln n))^\alpha\}$$

où $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$