CONCOURS X ENS 2023
MATHÉMATIQUES A - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

a. $0 \in \mathbb{H}$, $E \in \mathbb{H}$, puis pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lambda Z + Z' &= \begin{bmatrix} \lambda z_1 + z_1' & -\lambda\overline{z_2} - \overline{z_2'} \\ \lambda z_2 + z_2' & \lambda\overline{z_1} + \overline{z_1'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda z_1 + z_1' & -(\overline{\lambda z_2 + z_2'}) \\ \lambda z_2 + z_2' & \overline{\lambda z_1 + z_1'} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}ZZ' &= \begin{bmatrix} z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2' & -z_1\overline{z_2'} - \overline{z_2}\overline{z_1'} \\ z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2' & -z_2\overline{z_2'} + \overline{z_1}\overline{z_1'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2' & -(\overline{z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2'}) \\ z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2' & \overline{-\overline{z_2} z_2' + z_1 z_1'} \end{bmatrix} \\ &= Z(z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2', z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2') \in \mathbb{H}\end{aligned}$$

Enfin

$$Z(z_1, z_2)^* = Z(\overline{z_1}, -z_2) \in \mathbb{H}$$

On a montré que $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$, stable par $Z \mapsto Z^*$.

b.

$$\begin{aligned}ZZ^* &= Z(|z_1|^2 + |z_2|^2, 0) \\ &= \det(Z)E \\ &= N(Z)E\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}Z \in \mathbb{H}^\times &\Leftrightarrow N(Z) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow Z \neq 0\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
\forall Z' \in \mathbb{H}, \quad ZZ' = Z'Z &\Leftrightarrow \forall (z_1', z_2') \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2' = z_1 z_1' - \overline{z_2'} z_2 \\ z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2' = z_2' z_1 + \overline{z_1'} z_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \forall (z_1', z_2') \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} \overline{z_2} z_2' = \overline{z_2'} z_2 \\ z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2' = z_2' z_1 + \overline{z_1'} z_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \forall (z_1', z_2') \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2' = z_2' z_1 + \overline{z_1'} z_2 \end{cases} \qquad (\Rightarrow\text{: prendre } z_2' = z_2) \\
&\Leftrightarrow \forall (z_1', z_2') \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} z_2 = 0 \\ \overline{z_1} z_2' = z_2' z_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 0 \\ \overline{z_1} = z_1 \end{cases} \qquad (\Rightarrow\text{: prendre } z_2' \neq 0) \\
&\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}
\end{aligned}$$

2.

a. puisque $\det(.) = N(.)$, on a le résultat directement mais vérifions tout de même les calculs:

$$\begin{aligned}
N(ZZ') &= (z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2')(\overline{z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2'}) + (z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2')(\overline{z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2'}) \\
&= z_1 \overline{z_1} z_1' \overline{z_1'} - z_1 z_2 z_1' \overline{z_2'} - \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_1'} z_2' + z_2 \overline{z_2} z_2' \overline{z_2'} \\
&\quad + z_2 \overline{z_2} z_1' \overline{z_1'} + z_1 z_2 z_1' \overline{z_2'} + \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_1'} z_2' + z_1 \overline{z_1} z_2' \overline{z_2'} \\
&= (z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2})(z_1' \overline{z_1'} + z_2' \overline{z_2'}) \\
&= N(Z) N(Z')
\end{aligned}$$

b. Déjà on a $S \subset \mathbb{H}^\times$, $E \in S$, puis si $(Z, Z') \in S^2$,

$$\begin{aligned}
N(ZZ') &= N(Z)N(Z') \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(ZZ^{-1}) &= N(E) \\
&= 1 \\
\Rightarrow \quad N(Z^{-1}) &= \frac{1}{N(Z)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

montre que $Z^{-1} \in S$ et $ZZ' \in S$. S est un sous groupe de $\mathbb{H}^\times$.

3.

a. On remarque que

$$xE + yI + zJ + tK = Z(x - iy, -z + it)$$

donc

$$\begin{aligned}
N(xE + yI + zJ + tK) &= |x - iy|^2 + |-z + it|^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + t^2
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}U^2 &= x^2I^2 + xyIJ + xzIK + xyJI + y^2J^2 + yzJK + xzKI + yzKJ + z^2K^2\\ &= -(x^2+y^2+z^2)E + xyK - xzJ - xyK + yzI + xzJ - yzI\\ &= -N(U)E\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a déjà l'inclusion:

$$\mathbb{H}^{\mathrm{im}} \subset \{U \in \mathbb{H}, \quad U^2 \in \mathbb{R}^- E\}$$

Réciproquemment, on note que (E, I, J, K) est une base de $\mathbb{H}$ en tant que $\mathbb{R}$ algèbre, en posant $U = xE + yI + zJ + tK$ on a :

$$U^2 = -(-x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E + 2x(yI + zJ + tK)$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned}U^2 \in -\mathbb{R}^- E &\Leftrightarrow x = 0 \vee ((y,z,t) = 0 \wedge x^2 \leqslant 0)\\ &\Leftrightarrow x = 0\\ &\Leftrightarrow U \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}\end{aligned}$$

On peut conclure

$$\mathbb{H}^{\mathrm{im}} = \{U \in \mathbb{H}, \quad U^2 \in \mathbb{R}^- E\}$$

4.

$S = N^{-1}(\{1\})$ est l'image réciproque d'un fermé par l'application continue $N(.)$, donc est fermée.
Soit l'application

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{H}\\ (x,y,z,t) &\mapsto xE + yI + zJ + tK\end{aligned}$$

S est l'image par l'isométrie ψ de la sphère unité, qui est connexe par arcs; donc S est connexe par arcs. On peut expliciter:
Soit $(Z, Z') \in S$. On pose $\cos\theta = \langle Z, Z'\rangle = xx' + yy' + zz' + tt'$. Supposons $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. L'application

$$\begin{aligned}\gamma : [0,1] &\to S\\ t &\mapsto \cos(\theta t)Z + \sin(\theta t)(Z' - \cos\theta Z)\frac{1}{\sin\theta}\end{aligned}$$

est un arc inclus dans S qui relie continuement Z et Z'.
Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, on a égalité dans Cauchy-Schwartz, Z, Z' est liée et pour des raisons de norme on a même $Z' = \pm Z$.
Si $Z' = -Z$, l'arc suivant convient:

$$\begin{aligned}\gamma : [0,1] &\to S\\ t &\mapsto \cos(\pi t)Z + \sin(\pi t)\tilde{Z}\end{aligned}$$

Où $\tilde{Z} \in (\mathbb{R}Z)^\perp$, unitaire.

5.

a. Vu la condition que l'on souhaite obtenir, on a envie de calculer:

$$\begin{aligned}(U+V)^2 &= U^2+UV+VU+V^2\\ (U+V)^2 &= -(N(U)+N(V))E+UV+VU\end{aligned}$$

Or il est clair que $U+V\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, donc on a $(U+V)^2=-N(U+V)E$ et

$$-N(U+V)E=-(N(U)+N(V))E+UV+VU$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}U\perp V &\Leftrightarrow N(U+V)=N(U)+N(V)\\ &\Leftrightarrow 0=UV+VU\end{aligned}$$

En posant $U=yI+zJ+tK$ et $V=y'I+z'J+t'K$,

$$\begin{aligned}UV &= -(yy'+zz'+tt')E+(zt'-tz')I+(ty'-yt')J+(yz'-zy')K\\ UV &= -\langle U,V\rangle E+(zt'-tz')I+(ty'-yt')J+(yz'-zy')K\\ UV &= (zt'-tz')I+(ty'-yt')J+(yz'-zy')K\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\det_{(I,J,K)}(U,V,UV) &= \begin{vmatrix} y & y' & zt'-tz'\\ z & z' & ty'-yt'\\ t & t' & yz'-zy'\end{vmatrix}\\ &= (zt'-tz')^2+(ty'-yt')^2+(yz'-zy')^2\geqslant 0\end{aligned}$$

b. En gardant les mêmes notation

$$\begin{aligned}(U,V)\text{ orthonormale dans }\mathbb{H}^{\mathrm{im}} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix}y\\z\\t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y'\\z'\\t'\end{bmatrix}\text{ orthonormale dans }\mathbb{R}^3\\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix}y\\z\\t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y'\\z'\\t'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\z\\t\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y'\\z'\\t'\end{bmatrix}\text{ est une base orthonormale directe dans }\mathbb{R}^3\\ &\Leftrightarrow U,V,UV\text{ est une base orthonormale directe dans }\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\end{aligned}$$

puisque $\psi^{-1}(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})\simeq\mathbb{R}^3$

6.

Soit$(u,v),(u',v')\in(S\times S)^2$.

$$\begin{aligned}\alpha((u,v)\times(u',v')) &= \alpha(uu',vv')\\ &= Z\mapsto(uu')Z(vv')^{-1}\\ &= Z\mapsto uu'Z(v')^{-1}v^{-1}\\ &= Z\mapsto u(u'Z(v')^{-1})v^{-1}\\ &= (u.v^{-1})\circ(u'.(v')^{-1})\\ &= \alpha(u,v)\alpha(u',v')\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\alpha(u,v) = \mathrm{id} &\Leftrightarrow \forall Z \in \mathbb{H}, \quad uZv^{-1} = Z \\
&\Rightarrow v = u \wedge \forall Z \in \mathbb{H}, \quad uZu^{-1} = Z \qquad \text{(prendre } Z = v\text{)} \\
&\Leftrightarrow v = u \wedge \forall Z \in \mathbb{H}, \quad uZ = Zu \\
&\Leftrightarrow v = u \wedge u \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}} \qquad \text{(cf. 1)} \\
&\Leftrightarrow v = u = \pm E \qquad \text{(car } u \in S\text{)}
\end{aligned}$$

On conclut

$$\ker \alpha = \{-(E,E),(E,E)\}$$

7.

On remarque que si $u \in S$, $u^{-1} = u^*$, ce qui montre la linéarité de

$$\begin{aligned} S &\to S \\ u &\mapsto u^{-1} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que α est une application bilinéaire, avec $\dim S \times S < +\infty$ donc α est continue.

$$\begin{aligned}
2\langle uZv^{-1}, Z'\rangle &= N(uZv^{-1} + Z') - N(uZv^{-1}) - N(Z') \\
&= N(u(Z + u^{-1}Z'v)v^{-1}) - N(uZv^{-1}) - N(Z') \\
&= N(u)N(Z + u^{-1}Z'v)N(v^{-1}) - N(u)N(Z)N(v^{-1}) - N(Z') \\
&= N(Z + u^{-1}Z'v) - N(Z) - N(Z') \\
&= N(Z + u^{-1}Z'v) - N(Z) - N(u^{-1})N(Z')N(v) \\
&= N(Z + u^{-1}Z'v) - N(Z) - N(u^{-1}Z'v) \\
&= 2\langle Z, u^{-1}Z'v\rangle
\end{aligned}$$

Montre que l'endomorphisme adjoint de $\alpha(u,v)$ est $Z \mapsto u^{-1}Z'v = \alpha(u,v)^{-1}$ et donc $\alpha(u,v) \in O(\mathbb{H})$. On a vu question 4 que S est connexe par arcs. Il vient directement que $S \times S$, puis $\alpha(S \times S)$ l'est aussi par continuité de α.

On a $\mathrm{id} \in \alpha(S \times S) \cap SO(\mathbb{H})$. Supposons $\exists \beta \in \alpha(S \times S) \setminus SO(\mathbb{H})$. Il existe une fonction continue

$$\gamma : [0,1] \to \alpha(S \times S)$$

telle que $\gamma(0) = \mathrm{id}$ et $\gamma(1) = \beta$. Mais alors l'application

$$\det \circ \gamma : [0,1] \to \{-1, 1\}$$

est continue et vérifie $\det(\gamma(0)) = 1$ et $\det(\gamma(1)) = -1$; cela n'est pas possible et on peut conclure que

$$\alpha(S \times S) \subset SO(\mathbb{H})$$

8.

a. On vérifie facilement que $(\mathbb{R}E)^\perp = \mathbb{H}^{\text{im}}$.

$$\begin{aligned}
\langle u, u\rangle &= \langle \cos\theta E, \cos\theta E\rangle - 2\underbrace{\langle \cos\theta E, \sin\theta v\rangle}_{=0} + \langle \sin\theta v, \sin\theta v\rangle \\
&= \cos^2\theta\langle E, E\rangle + \sin^2\theta\langle v, v\rangle \\
&= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

prouve que $u \in S$.

$$\begin{aligned}
u(\cos\theta E - \sin\theta v) &= \cos^2\theta E - \sin\theta\cos\theta v + \sin\theta\cos\theta v - \sin^2\theta \underbrace{v^2}_{=-N(v)E} \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)E \\
&= E
\end{aligned}$$

montre que $(\cos\theta E + \sin\theta v)^{-1} = (\cos\theta E - \sin\theta v) = (\cos(-\theta)E + \sin(-\theta)v)$

b.

$$\begin{aligned}
C_u(v) &= uvu^{-1} \\
&= (-\sin\theta E + \cos\theta v)u^{-1} \\
&= (-\sin\theta E + \cos\theta v)(\cos\theta E - \sin\theta v) \\
&= (-\sin\theta E + \cos\theta v)(\cos\theta E - \sin\theta v) \\
&= v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_u(vw) &= uvwu^{-1} \\
&= (-\sin\theta E + \cos\theta v)w(\cos\theta E - \sin\theta v) \\
&= -\sin\theta\cos\theta w + \sin^2\theta wv + \cos^2\theta vw - \sin\theta\cos\theta vwv
\end{aligned}$$

On a remarqué à la question 5 que le produit dans $\mathbb{H}^{\text{im}}$ correspond au produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, donc

$$\begin{aligned}
wv &= -vw \\
vwv &= w
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
C_u(vw) &= -2\sin\theta\cos\theta w + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)vw \\
&= -\sin 2\theta w + \cos 2\theta vw
\end{aligned}$$

De plus on remarque que la restriction de C_u à $\text{vect}(w, vw)$ est une rotation de en dimension 2, ce qui permet de compléter ainsi la matrice de C_u dans la base orthonormale directe (v, w, vw):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

On reconnait la rotation d'angle 2θ autour du vecteur v.

9.

L'application $u \mapsto C_u$ est bien une application de $S \mapsto SO(\mathbb{H}^{\text{im}})$, c'est un morphisme de groupes puisque c'est la restriction de α au sous-groupe$\{(u,u), u \in S\}$ de $S \times S$. D'autre part il est surjectif d'après ce qui précède puisque les endomorphismes orthogonaux directs en dimension 3 sont exactement les rotations.

De plus,

$$\begin{aligned} C_u = \mathrm{id}_{\mathbb{H}^{\text{im}}} &\Leftrightarrow 2\theta \in 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow u = \pm E \end{aligned}$$

10.

a. On sait maintenant construire tout construire tout endonorphisme orthogonal direct qui laisse stable $\mathrm{vect}(E)$, car sa restriction à $\mathbb{H}^{\text{im}}$ est un endomorphisme orthogonal direct.

Soit $f \in SO(\mathbb{H})$. $N(f(E)) = f(E) = 1$, ainsi $f(E) \in S$ et

$$(\alpha(f(E)^{-1}, E)f)(E) = E$$

Or $\alpha(f(E)^{-1}, E)f \in SO(\mathbb{H})$, donc $\exists u \in S, \quad \alpha(f(E)^{-1}, E)f = \alpha(u,u)$. Au final

$$\begin{aligned} f &= \alpha(f(E)^{-1}, E)\alpha(u,u) \\ &= \alpha(f(E)^{-1}u, u) \in \alpha(S \times S) \end{aligned}$$

On a montré $SO(\mathbb{H}) \subset \alpha(S \times S)$ et donc $\alpha(S \times S) = SO(\mathbb{H})$.

b. $S \times \{1\}$ est un sous groupe de $S \times S$ donc son image par le morphisme de groupes α est un sous groupe de $\alpha(S \times S) = SO(\mathbb{H})$.

Posons

$$\begin{aligned} g &: Z \mapsto uZv^{-1} \\ n &: Z \mapsto aZ \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} gng^{-1}(Z) &= u(a(u^{-1}Zv))v^{-1} \\ &= uau^{-1}Z \end{aligned}$$

montre que $gng^{-1} = \alpha(uau^{-1}, E) \in N$.

D'autre part on a:

$$\pm\,\mathrm{id} = \alpha(\pm E, E)$$

et on à donc déjà:

$$\{\pm\,\mathrm{id}\} \subset N \subset SO(\mathbb{H})$$

$$\begin{aligned}\alpha(a,E)=\alpha(u,v) &\Leftrightarrow (ua^{-1},v)\in\ker\alpha\\ &\Leftrightarrow (ua^{-1},v)=\pm(E,E)\\ &\Leftrightarrow (u,v)=(a,E)\vee(u,v)=-(a,E)\end{aligned}$$

montre que $\alpha(u,v)\in SO(\mathbb{H})\setminus N$ quand $v\notin\{\pm E\}$. Enfin on a par example $\alpha(I,E)\in N\setminus\{\pm\,\mathrm{id}\}$ ce qui permet de conclure.

11.

On a $Auth(\mathbb{H})\subset GL(\mathbb{H})$, $\mathrm{id}\in Auth(\mathbb{H})$, puis si $(f,g)\in Auth(\mathbb{H})$,

$$\begin{aligned}fg(uv)&=f(g(uv))\\&=f(g(u)g(v))\\&=f(g(u))f(g(v))\end{aligned}$$

En posant $u=f(u')$, $v=f(v')$,

$$\begin{aligned}f^{-1}(uv)&=f^{-1}(f(u')f(v'))\\&=f^{-1}(f(u'v'))\\&=u'v'\\&=f^{-1}(u)f^{-1}(v)\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\alpha(u,u)(zz')&=uzz'u^{-1}\\&=uzu^{-1}uz'u^{-1}\\&=\alpha(u,u)(z)\alpha(u,u)(z')\end{aligned}$$

montre bien que $\alpha(u,u)\in Auth(\mathbb{H})$ pour $u\in S$.

12.

On a

$$f(I^2)=f(I)^2$$

d'une part,

$$\begin{aligned}f(I^2)&=f(-E)\\&=-E\end{aligned}$$

d'autre part, ainsi

$$f(I)^2=-E$$

ce qui montre d'après 3.b que $f(I) \in \mathbb{H}^{\text{im}}$, et que $N(f(I)) = 1$. De même pour J, et aussi $I + J$. $\mathbb{H}^{\text{im}}$ est stable par f, et f y conserve la norme. De plus,

$$\begin{aligned} 2\langle f(I), f(J)\rangle &= N(f(I+J)) - N(f(I)) - N(f(J)) \\ &= 2 - 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a montré que $(f(I), f(J))$ est orthonormale. La question 5.b permet de conclure

$$(f(I), f(J), f(K)) = (f(I), f(J), f(I)f(J))$$

est une base orthonormale de $\mathbb{H}^{\text{im}}$.

13.

a. Dans la question précédente on a montré que la restriction d'un automorphismes de H à $\mathbb{H}^{\text{im}}$ est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{H}^{\text{im}}$ car il conserve la norme. De plus il transforme la bon directe (I, J, K) en la bon directe $(f(I), f(J), f(K))$, donc il est direct. Il y donc un sens à définir l'application:

$$\begin{aligned} Auth(\mathbb{H}) &\to SO(\mathbb{H}^{im}) \\ f &\mapsto f|_{\mathbb{H}^{im}} \end{aligned}$$

Cette application est un morphisme de groupes. Il est surjectif car $\forall u \in S, \quad \alpha(u,u) \in Auth(\mathbb{H})$ et d'après la question 9.

D'autre part, deux automorphismes qui s'accordent sur $\mathbb{H}^{im}$ s'accordent aussi sur $\mathbb{H} = \mathbb{R}_{\mathbb{H}} \oplus \mathbb{H}^{im}$ entier car leur restriction à $\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ est l'identité. Donc on a bien un isomorphisme de groupes.

b. Si on note

$$\begin{aligned} g : S &\to SO(\mathbb{H}^{im}) \\ u &\mapsto C_u \end{aligned}$$

le morphisme surjectif de la question 9, on a

$$Auth(\mathbb{H}) \simeq SO(\mathbb{H}^{im}) \simeq S/\ker g \simeq (S/\ker g \times S/\ker g) \simeq \alpha(S/\ker g \times S/\ker g) = \{\alpha(u,u), u \in S\}$$

Comme $\{\alpha(u,u), u \in S\}$ est un sous groupe de $Auth(\mathbb{H})$, on a finalement

$$Auth(\mathbb{H}) = \{\alpha(u,u), u \in S\}$$

14.

a. Comme $\mathcal{K}$ est une partie de $M_2(\mathbb{R})$ de dimension finie, on peut montrer que c'est une partie fermée et bornée.

soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{K}$, qui converge vers $A \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|A_n x\| \leqslant \|x\|_2$$

Par continuité de $M \mapsto \|Mx\|$, on obtient en passant à la limite

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|Ax\| \leqslant \|x\|_2$$

i.e. $A \in \mathcal{K}$.

Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut trouver $a, b > 0$ tels que

$$a\|.\|_\infty \leqslant \|.\| \leqslant b\|.\|_\infty$$

Soit $|a_{kl}| = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\} = \|A\|_\infty$, et

$$E_l = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{ligne } l$$

Alors:

$$a\|A\|_\infty = a\|AEl\|_\infty \leqslant \|AE_l\| \leqslant \|E_l\|_2 = 1$$

montre que $\forall A \in \mathcal{K}, \quad \|A\|_\infty \leqslant \frac{1}{a}$

On a montré que $\mathcal{K}$ est une partie fermée bornée, donc un compact de $M_2(\mathbb{R})$.

Soit $t \in [0,1]$, $A, B \in \mathcal{K}^2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|(tA + (1-t)B)x\| &\leqslant \|tAx\| + \|(1-t)Bx\| \\ &= t\|Ax\| + (1-t)\|Bx\| \\ &\leqslant t\|x\|_2 + (1-t)\|x\|_2 \\ &= \|x\|_2 \end{aligned}$$

et on a $tA + (1-t)B \in \mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ est convexe.

b. L'application det(.) est continue sur $M_2(\mathbb{R})$, elle est bornée sur le compact $\mathcal{K}$ et atteint ses bornes, donc

$$\exists A \in \mathcal{K}, \quad \det A = \sup_{B \in \mathcal{K}} \det B$$

15.

Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut trouver $c, d > 0$ tels que

$$c\|.\|_2 \leqslant \|.\| \leqslant d\|.\|_2$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\|_2 &= \|Ex\|_2 \\ &\geqslant \frac{1}{d}\|Ex\| \\ &= \|\frac{1}{d}Ex\| \end{aligned}$$

Cela montre que $\frac{1}{d}E \in \mathcal{K}$ et donc $\det A \geqslant \det \frac{1}{d}E = \frac{1}{d^2} > 0$.

La fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \|Ax\| \end{aligned}$$

est continue, donc bornée et atteint ses bornes puisque $\mathcal{C}$ compact. Soit $x(\neq 0)$ tel que

$$\|Ax\| = \sup_{y\in\mathcal{C}}\|Ay\|(>0)$$

On a

$$\begin{aligned}\forall y \in \mathcal{C}, \quad \|\frac{1}{\|Ax\|}Ay\| &= \frac{1}{\|Ax\|}\|Ay\| \\ &\leqslant 1\end{aligned}$$

i.e. $\frac{1}{\|Ax\|}A \in \mathcal{K}$. donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|Ax\|^2}\det A = \det\frac{1}{\|Ax\|}A &\leqslant \det A \\ \Rightarrow \qquad \|Ax\| &\geqslant 1\end{aligned}$$

Comme on sait d'autre part que $\|Ax\| \leqslant 1$, on a $\|Ax\| = 1$.

16.

a. On commence par remarquer que $AB \in \mathcal{K}$. en effet, pour $y \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\|ABy\| &\leqslant \|By\|_2 \\ &= \|y\|_2\end{aligned}$$

car $B \in SO(\mathbb{R}^2)$. Supposons que

$$AB\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{bmatrix} \in \mathcal{K}$$

Alors

$$\forall t \in [0,1], \quad tAB + (1-t)AB\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{bmatrix} = AB\begin{bmatrix} t(-r+1)+r & 0 \\ 0 & t(-\frac{1}{r}+1)+\frac{1}{r}\end{bmatrix} \in \mathcal{K}$$

Or

$$\det\begin{bmatrix} t(-r+1)+r & 0 \\ 0 & t(-\frac{1}{r}+1)+\frac{1}{r}\end{bmatrix} = t^2\underbrace{(-r+1)(-\frac{1}{r}+1)}_{<0} + t(r+\frac{1}{r}-2)+1$$

est un polynôme de degré 2 dont le coeff de t^2 est négatif, qui vérifie $P(0) = P(1) = 1$; donc

$$\begin{aligned}\forall t \in]0,1[, \quad \det\begin{bmatrix} t(-r+1)+r & 0 \\ 0 & t(-\frac{1}{r}+1)+\frac{1}{r}\end{bmatrix} &> 1 \\ \Rightarrow \qquad \det AB\det\begin{bmatrix} t(-r+1)+r & 0 \\ 0 & t(-\frac{1}{r}+1)+\frac{1}{r}\end{bmatrix} &> \det A\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Donc

$$AB\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{bmatrix} \notin \mathcal{K}$$

ou encore $\exists x_r \in \mathcal{C}$,

$$\|AB\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{bmatrix}x_r\| > 1$$

b. On pose:

$$B = \left[x \middle| x_\perp \right] \in SO(\mathbb{R})$$

de sorte que

$$B \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ z_r \end{bmatrix} = r y_r x + \frac{1}{r} z_r x_\perp$$

et puis

$$\begin{aligned} \|B \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ z_r \end{bmatrix}\|_2^2 &= r^2 y_r^2 + \frac{1}{r^2} z_r^2 \\ &= r^2 + (\frac{1}{r^2} - r^2) z_r^2 \\ &= r^2 + \frac{1 - r^4}{r^2} z_r^2 \end{aligned}$$

Comme

$$\|B \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ z_r \end{bmatrix}\|_2^2 \geqslant \|AB \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ z_r \end{bmatrix}\|^2 > 1$$

On a

$$\begin{aligned} & r^2 + \frac{1 - r^4}{r^2} z_r^2 > 1 \\ \Leftrightarrow \quad & z_r^2 > \frac{r^2}{1 + r^2} \end{aligned}$$

17.

On applique ce qui précède à $r = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$. On obtient une suite (x_n) d'éléments de $\mathcal{C}$ qui vérifie:

$$\forall n \geqslant 2, \quad \|AB \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} x_n\| > 1 \tag{1}$$

$$B \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} y_n x + n z_n x_\perp$$

Cette suite converge car

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 2, \quad n z_n &> n \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

montre que $x_n = (y_n, z_n)$ converge vers $(0, 1)$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} B \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix} = x_\perp$$

Par continuité de $x \mapsto \|Ax\|$, le passage à la limite dans 1 donne:

$$\|Ax_\perp\| \geqslant 1$$

Comme par ailleurs $\|Ax_\perp\| \leqslant 1$, finalement $\|Ax_\perp\| = 1$ et $(x, x_\perp)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|Ae_i\| = 1$.

18.

Quite à faire une rotation de la base de $\mathbb{R}^2$, on peut supposer

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$y = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

avec $\theta \in]0, \pi[$ (ce qui assure que $\cos\frac{\theta}{2} > 0$). Sans calcul il est direct que:

$$\frac{1}{\|b+a\|}(b+a) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{1}{\|b-a\|}(b-a) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

En effet on prend la bissectrice intérieure puis on fait une rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

On définit une suite d'angles par:

$$a_0 = 0$$
$$b_0 = \theta$$

puis la récurrence

$$a_{n+1} = b_n$$
$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{\pi}{2}$$

On prouve facilement par récurrence que:

$$0 < b_n - a_n < \pi$$
$$b_{n+1} \geqslant b_{n-1} + \frac{\pi}{2}$$

autrement dit, au bout de 8 itérations au plus, on a fait un tour complet et donc un n'importe quel élément du cercle unité se retouve encadré par deux éléments de T, dont l'angle est inférieur à π: On se ramène donc à la situation suivante. On se donne z quelconque dans $\mathcal{C}$, tel que

$$z = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \in]0, \theta[$, avec toujours:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in T$$

et

$$y = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \in T$$

On peut maintenant faire une recherche dichotomique classique en construisant une suite d'éléments de T convergeant vers z; on en concluera que $z \in T$ puisque T est fermée. On construit la suite suivante:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ b_0 &= \theta \end{aligned}$$

puis la récurrence Si $\alpha = \frac{a_n+b_n}{2}$ on s'arrête puisque on a prouvé que $z \in T$. Si $\alpha \in]a_n, \frac{a_n+b_n}{2}[$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \end{aligned}$$

Si $\alpha \in]\frac{a_n+b_n}{2}, b_n[$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} &= b_n \end{aligned}$$

On vérifie que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes qui tendent vers α, ou encore $\begin{bmatrix} \cos a_n \\ \sin a_n \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \cos b_n \\ \sin b_n \end{bmatrix}$ sont deux suites d'éléments de T convergeant vers z, ce qu'on voulait démontrer.

Pour conclure $\mathcal{C} \subset T$ et finalement on a bien

$$\mathcal{C} = T$$

19.

On la partie de $\mathcal{C}$ suivante:

$$T = \{x \in \mathcal{C}, \quad \|Ax\| = 1\}$$

On à déjà $x, x_\perp \in T$, avec $x_\perp \notin \{x, -x\}$. Mais si $y, z \in T$ avec $z \notin \{y, -y\}$, alors:

$$\|A(y-z)\|^2 + \|A(y+z)\|^2 \geqslant 4$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|A(y-z)\|^2 + \|A(y+z)\|^2 &\leqslant \|y-z\|_2^2 + \|y+z\|_2^2 \\ &= 2(\|y\|_2^2 + \|z\|_2^2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

On a donc l'égalitè dans chaque inégalité utilisée, i.e.:

$$\|A(y-z)\| = \|y-z\|_2$$
$$\|A(y+z)\| = \|y+z\|_2$$

ou encore

$$\|A\frac{1}{\|y-z\|_2}(y-z)\| = 1$$
$$\|A\frac{1}{\|y+z\|_2}(y+z)\| = 1$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\|y+z\|_2}(y+z), \frac{1}{\|y-z\|_2}(y-z) \in T$$

T est fermée puis que l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par la fonction continue $x \mapsto \|Ax\|$, et donc vérifie toutes les hypothèses de la quesiton précédente. On en conclut que

$$\forall x \in \mathcal{C}, \quad \|Ax\| = 1$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|Ax\| = \|x\|_2$$

Mais alors la norme $\|.\|$ provient bien d'un produit scalaire car:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \|AA^{-1}(x+y)\|^2 - \|AA^{-1}(x-y)\|^2 \\ &= \|A^{-1}(x+y)\|_2^2 - \|A^{-1}(x-y)\|_2^2 \\ &= 4\langle A^{-1}x, A^{-1}y\rangle\end{aligned}$$

où $\langle . \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$.

On a montré le théorème:

Theorême A. Soit $\|.\|$ une norme sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \geqslant 4$$

alors $\|.\|$ provient d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

20.

a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, tel que $P(x) = 0$. On décompose P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{l}(X^2+b_jX+c_j)^{\beta_j}$$

où $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$. Comme il n'existe pas de diviseur de 0, on peut conclure

$$\exists i \in [\![1,k]\!], \quad x - \lambda_i = 0 \vee \exists j \in [\![1,l]\!], \quad x^2 - b_jx + c_j = 0$$

Dans les deux cas, $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$.

b. On suppose donc $x^2 + b_j x + c_j = 0$, avec $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$.Il n'a pas de difficultés à montrer que $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$ est une sous algèbre de A. Il faut trouver qui joue le rôle de i dans cette algèbre. On écrit la forme canonique:

$$\begin{aligned} x^2 + b_j x + c_j = 0 &\Leftrightarrow (x + \frac{b_j}{2})^2 + \frac{\overbrace{4c_j - b_j^2}^{>0}}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\frac{2(x + \frac{b_j}{2})}{\sqrt{-\Delta_j}})^2 = -1 \end{aligned}$$

De la même manière que $(1, \frac{2(X+\frac{b_j}{2})}{\sqrt{-\Delta_j}})$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, $(1, \frac{2(x+\frac{b_j}{2})}{\sqrt{-\Delta_j}})$ est une base de $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$ et on vérifie aisément que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} + \mathbb{R}x &\to \mathbb{C} \\ a_0 + a_1 \frac{2(x + \frac{b_j}{2})}{\sqrt{-\Delta_j}} &\mapsto a_0 + i a_1 \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ algèbres.

21.

d'après ce qui précède, il existe $i_A \in A$ tel que $i_A^2 = -1$, à moins que $A \setminus \mathbb{R} = \varnothing$, ce qui n'est pas.

22.

a.

$$\begin{aligned} T(xy) &= i_A x y i_A \\ &= -i_A x i_A i_A y i_A \\ &= -T(x)T(y) \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} T^2(x) &= i_A(i_A x i_A) i_A \\ &= x \end{aligned}$$

Donc $T^2 = \text{id}$. Autrement dit $\ker T^2 - \text{id} = A$. Or comme $X - 1 \wedge X + 1 = 1$, le théorème de décomposition des noyaux nous dit que $\ker T^2 - \text{id} = \ker(T - \text{id}) \oplus \ker(T + \text{id})$. On a donc bien

$$A = \ker(T - \text{id}) \oplus \ker(T + \text{id})$$

23.

Supposons $x \in \ker(T + \text{id})$.

$$\begin{aligned} T(x) = -x &\Leftrightarrow i_A x i_A = -x \\ &\Leftrightarrow x i_A = i_A x \end{aligned}$$

Posons $P(x) = x^2 + bx + c = 0$, avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. P est scindé sur $\mathbb{C}$, notons une de ses racines $z = u + iv$. Comme x et i_A commutent,

$$\begin{aligned} (x - (u + i_A v))(x - (u - i_A v)) &= x^2 - 2ux + (u^2 + v^2) \\ &= x^2 + bx + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme il n'existe pas de diviseur de 0 dans A, on a

$$x - (u + i_A v) = 0 \vee x - (u - i_A v)$$

i.e. $x \in \mathbb{R} + \mathbb{R}i_A$.

Réciproquemment, il est clair que $\mathbb{R} + \mathbb{R}i_A \subset \ker(T + \mathrm{id})$. On a finalement

$$\mathbb{R} + \mathbb{R}i_A = \ker(T + \mathrm{id})$$

Or $U \subsetneq A$ car A n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$, donc nécéssairement $\ker(T - \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

24.

a. Soit $x \in \ker(T - \mathrm{id})$.

$$\begin{aligned} T(\beta x) &= -T(\beta)T(x) \\ &= -T(\beta)T(x) \\ &= -\beta x \end{aligned}$$

montre que $\beta x \in \ker(T + \mathrm{id})$. En particulier pour $x = \beta$, $\beta^2 \in \ker(T + \mathrm{id}) = U$.

De même, on voit que $\beta \ker(T + \mathrm{id}) \subset \ker(T - \mathrm{id})$. notons

$$\begin{aligned} f : A &\to A \\ x &\mapsto \beta x \end{aligned}$$

Cette application linéaire est injective donc $\dim(\ker(T - \mathrm{id})) = \dim f(\ker(T - \mathrm{id})) \leqslant \dim U$ et

$$\dim(U) = \dim f \ker(T + \mathrm{id}) = \dim f(U) \leqslant \dim \ker(T - \mathrm{id})$$

Donc $\dim \beta U = \dim U = \dim \ker(T - \mathrm{id})$ et

$$\beta \ker(T + \mathrm{id}) = \ker(T - \mathrm{id})$$

b. Posons $\beta^2 + b\beta + c = 0$, et $\beta^2 = u + vi_A \in U$. Nécéssairement $b = 0$ car sinon on aurait $\beta \in U$, ce qui n'est pas. De plus, comme A n 'admet pas de diviseur de 0, on ne peut pas avoir $c \leqslant 0$ car sinon on aurait $\beta = \pm\sqrt{-c} \in \mathbb{R} \subset U$. Donc $\beta^2 \in \mathbb{R}^{+*}$.

c. On a montré que tout élément de A s'écrit de manière unique

$$x = a_1 + b_1 i_A + \beta(a_2 + b_2 i_A)$$

Quitte à remplacer β par $\frac{1}{\sqrt{-\beta^2}}\beta$ on peut maintenant supposer que $\beta^2 = -1$. On remarque alors que la multiplication de deux éléments de A donne:

$$\begin{aligned} xx' &= (a_1 + b_1 i_A + \beta(a_2 + b_2 i_A))(a_1' + b_1' i_A + \beta(a_2' + b_2' i_A)) \\ &= (a_1 + b_1 i_A)(a_1' + b_1' i_A) + \beta(a_2 + b_2 i_A)\beta(a_2' + b_2' i_A) + \beta(a_2 + b_2 i_A)(a_1' + b_1' i_A) + (a_1 + b_1 i_A)\beta(a_2' + b_2' i_A) \end{aligned}$$

On poursuit en se souvenant que β anti-commute avec i_A:

$$\begin{aligned} xx' &= (a_1 + b_1 i_A + \beta(a_2 + b_2 i_A))(a_1' + b_1' i_A + \beta(a_2' + b_2' i_A)) \\ &= (a_1 + b_1 i_A)(a_1' + b_1' i_A) + (a_2 - b_2 i_A)\beta^2(a_2' + b_2' i_A) + \beta(a_2 + b_2 i_A)(a_1' + b_1' i_A) + \beta(a_1 - b_1 i_A)(a_2' + b_2' i_A) \\ &= (a_1 + b_1 i_A)(a_1' + b_1' i_A) - (a_2 - b_2 i_A)(a_2' + b_2' i_A) + \beta[(a_2 + b_2 i_A)(a_1' + b_1' i_A) + (a_1 - b_1 i_A)(a_2' + b_2' i_A)] \end{aligned}$$

On reconnait la multiplication dans $\mathbb{H}$ du début du problème, et on peut montrer maintenant sans difficultés que l'application:

$$\begin{aligned}\varphi : A &\to \mathbb{H}\\ a_1 + b_1 i_A + \beta(a_2 + b_2 i_A) &\mapsto Z(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)\end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ algèbre.

On a bien montré le théorème:

Theorème B. Une $\mathbb{R}$ algèbre algébrique et sans diviseur de 0 est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

25.

On utilise l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned}\|(u+v)^2 - (u-v)^2\| &= \|4uv\|\\ &= 4\|u\|\|v\|\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\|(u+v)^2 - (u-v)^2\| &\leqslant \|(u+v)^2\| + \|(u-v)^2\|\\ &= \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\end{aligned}$$

Comme V est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, le théorème A nous dit que $\|.\|$ provient d'un produit scalaire.

26.

Le résultat est immédiat si $x \in \mathbb{R}$. Supposons maintenant $x \in A \setminus \mathbb{R}$. Appliquons le résultat de la question précédente à x et $y = 1$ de sorte que $V = \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ soit de dimension 2. On note $\langle . \rangle$ le produit scalaire dont dérive la norme $\|.\|$ sur V. On prend 1 que l'on complète en une base orthonormale pour ce produit scalaire de V, $(1, e_1)$. Posons $x = x_0 + x_1 e_1$. On a

$$\begin{aligned}x^2 &= (x_0 + x_1 e_1)(x_0 + x_1 e_1)\\ &= x_0^2 + x_1^2 e_1^2 + 2x_0 x_1 e_1 \qquad (2)\end{aligned}$$

On est guidé par le fait que l'on doit avoir $\|x^2\| = \|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2$, ce qui est obtenu si $e_1^2 = -1$.

Le théorème de Pythagore dans l'espace euclidien $\mathbb{R} + \mathbb{R}e_1$ donne

$$\begin{aligned}\|e_1 - 1\|^2 &= \|e_1\|^2 + \|1\|^2\\ &= 2\end{aligned}$$

et

$$\|e_1 + 1\|^2 = 2$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\|e_1^2 - 1\|^2 &= \|(e_1 - 1)(e_1 + 1)\|^2\\ &= \|e_1 - 1\|^2 \|e_1 + 1\|^2\\ &= 4\end{aligned}$$

ou encore $\|e_1^2 + (-1)\| = 2 = \|e_1^2\| + \|-1\|$. On a donc égalité dans l'inégalité triangulaire, ce qui montre que e_1^2 et -1 sont colinéaires et de même sens, et même égaux car unitaires. Ainsi, l'égalité 2 donne:

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 + 2x_0x_1e_1 \in \mathrm{vect}(1, e_1) = \mathrm{vect}(1, x)$$

27.

On a montré que A est algébrique. De plus A n'admet pas de diviseur de 0 car

$$\begin{aligned} xy = 0 &\Leftrightarrow \|xy\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\|\|y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\| = 0 \vee \|y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème B de la partie précédente, ce qui démontre le théorème:

Theorème C. Une $\mathbb{R}$ algèbre A munie d'une norme telle que

$$\forall x, y \in A, \quad \|xy\| = \|x\|\|y\|$$

est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.