CONCOURS MINES-PONTS 2023
MATHÉMATIQUES 2 - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

On a:

$$\forall x \in [-1, 1], \quad 0 \leqslant \left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}$$

qui est le terme d'une série convergente; cela montre que le rayon de convergence de cette série entière vérifie $R \geqslant 1$, et que σ est définie au moins sur $]-1, 1[$. De plus, $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k2}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ convergent, et pour $|x| > 1$, on a $\frac{x^k}{k^2} \nrightarrow 0$. donc au final σ est définie sur $[-1, 1]$.

La série entière converge normalement sur $[-1, 1]$, donc la somme σ y est continue.

2.

On fait deux intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= [\frac{1}{n}\sin(nt)(\alpha t^2 + \beta t)]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi (2\alpha t + \beta)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= [\frac{1}{n}\sin(nt)(\alpha t^2 + \beta t)]_0^\pi + \frac{1}{n^2}[(2\alpha t + \beta)\cos(nt)]_0^\pi - \frac{2\alpha}{n^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t}_{=0} \\
&= \frac{1}{n}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}(\alpha\pi^2 + \beta\pi) + \frac{1}{n^2}[(2\alpha\pi + \beta)\cos(n\pi) - \beta\cos(0)] \\
&= \frac{1}{n^2}[(2\alpha\pi + \beta)(-1)^n - \beta]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha\pi + \beta = 0 \\ -\beta = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2\pi} \\ \beta = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\begin{aligned}
2\sin(\frac{t}{2})\cos(kt) &= \sin(\frac{(2k+1)t}{2}) - \sin(\frac{(2k-1)t}{2}) \\
&= \sin(\frac{(2k+1)t}{2}) - \sin(\frac{(2(k-1)+1)t}{2})
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}2\sin(\frac{t}{2})\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= \sin(\frac{(2n+1)t}{2}) - \sin(\frac{(2(1-1)+1)t}{2})\\ &= \sin(\frac{(2n+1)t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}[-\cos(xt)\varphi(t)]_0^{\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi}\varphi'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x}(-\cos(x\pi)\varphi(\pi)+\varphi(0)+\int_0^{\pi}\varphi'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t)\end{aligned}$$

La fonction continue φ' est bornée sur le segment $[0,\pi]$, donc on peut écrire:

$$\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|x|}(|\varphi(\pi)|+|\varphi(0)|+\pi\sup_{[0,\pi]}\left|\varphi'\right|)$$

ce qui montre bien que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Soit g la fonction constinue sur $[0,\pi]$,définie par:

$$\begin{aligned}g_n : [0,\pi] &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \begin{cases}\dfrac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} - \dfrac{1}{2} & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t=0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2\pi}t^2-t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}(\frac{1}{2\pi}t^2-t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}(\frac{1}{2\pi}t^2-t)g_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}(\frac{1}{2\pi}t^2-t)\left[\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}-\frac{1}{2}\right]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}(\frac{1}{2\pi}t^2-t)\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}\sin(\frac{(2n+1)t}{2}) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2\pi}t^2-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}(\frac{1}{2\pi}t^2-t)\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}\sin(\frac{(2n+1)t}{2}) + \frac{\pi^2}{6} \qquad (1)\end{aligned}$$

On pose:

$$\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t > 0 \\ -2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

φ admet un DL en 0 à l'ordre 1:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\underset{t\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{\frac{t}{2} + \mathrm{O}(t^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{\pi}t - 2}{1 + \mathrm{O}(t^2)} \\ &= (\frac{1}{\pi}t - 2)(1 + \mathrm{O}(t^2)) \\ &= \frac{1}{\pi}t - 2 + \mathrm{O}(t^2) \end{aligned}$$

Ce qui montre que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = \frac{1}{\pi}$. De plus d'après les théorèmes géneraux φ est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in]0,\pi], \quad \varphi'(t) &= \frac{(\frac{1}{\pi}t - 1)\sin(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2\pi}t^2 - t)\cos(\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} \\ &\underset{t\to 0}{=} \frac{\frac{t^2}{4\pi} + \mathrm{o}(t^2)}{\frac{t^2}{4} + \mathrm{o}(t^2)} \\ &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

montre que φ est de classe C^1.

On peut donc faire tendre $n \to +\infty$ dans l'équation 1 pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4.

La fonction $t \mapsto (\sin t)^x = e^{x\ln(\sin t)}$ est C^0 par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} (\sin t)^x &= e^{x\ln(\sin t)} \\ &\underset{t\to 0}{=} e^{x\ln(t+\mathrm{o}(t^2))} \\ &= e^{x\ln t + \ln(1+\mathrm{o}(t))} \\ &= e^{x\ln t + \mathrm{o}(t)} \\ (\sin t)^x &= t^x(1+\mathrm{o}(t)) \end{aligned}$$

Ona donc:

$$0 \leqslant (\sin t)^x \underset{\substack{t\to 0 \\ t>0}}{\sim} t^x$$

et donc

$$\begin{aligned}(\sin t)^x \text{ sommable en } 0 &\Leftrightarrow -x < 1\\ &\Leftrightarrow x > -1\end{aligned}$$

La fonction f est définie sur $]-1,+\infty[= I$.
Soit $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+2}\,\mathrm{d}t &= \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x (\sin t)^2\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x (1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x - \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad (2)\end{aligned}$$

Une intégration par parties donne:

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x cos^2 t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x+1}[(\sin t)^{x+1}\cos t]_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{x+1}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+1}\sin t\,\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{-\frac{1}{x+1}(\sin\epsilon)^{x+1}\cos\epsilon}_{\underset{t\to 0^+}{\to} 0} + \frac{1}{x+1}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On reprend alors l'équation 2 et on fait tendre $\epsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}&f(x+2) = f(x) - \frac{1}{x+1} f(x+2)\\ \Leftrightarrow &(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x) \qquad (3)\end{aligned}$$

5.

On va appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral: On pose $I_\alpha = [\alpha,+\infty[$, pour $\alpha \in]-1,0]$. puis:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha :]0,\frac{\pi}{2}] &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \ln(\sin t)\frac{1}{t^{-\alpha}}\end{aligned}$$

La fonction φ_α est C^0 par morceaux, intégrable (intégrale de Bertrand $-\alpha < 1$).
On pose:

$$\begin{aligned}g : I_\alpha \times]0,\frac{\pi}{2}] &\to \mathbb{R}^+\\ (x,t) &\mapsto (\sin t)^x\end{aligned}$$

i $\forall x \in I_\alpha,\quad g(x,.) : t \mapsto (\sin t)^x$ est C^0 par morceaux et intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$,
ii $\forall x \in I_\alpha,\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,.) : t \mapsto \ln(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 par morceaux sur $]0,\frac{\pi}{2}]$,
iii $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}],\quad \frac{\partial g}{\partial x}(.,t) : x \mapsto \ln(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 sur I_α,
iv $\forall x \in I_\alpha,\quad |g(x,t)| \leqslant \varphi_\alpha(t)$

On peut conclure que f est de classe C^1 sur I_α, $\forall \alpha \in]-1,0]$, et donc sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)(\sin t)^x\,\mathrm{d}t$$

De même:

$$\psi_\alpha :]0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \ln^2(\sin t)\frac{1}{t^{-\alpha}}$$

La fonction ψ_α est C^0 par morceaux, intégrable (intégrale de Bertrand $-\alpha < 1$).

i $\forall x \in I_\alpha$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,.) : t \mapsto \ln(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 par morceaux et intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$,

ii $\forall x \in I_\alpha$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,.) : t \mapsto \ln^2(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 par morceaux sur $]0,\frac{\pi}{2}]$,

iii $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(.,t) : x \mapsto \ln^2(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 sur I_α,

iv $\forall x \in I_\alpha$, $|g(x,t)| \leqslant \psi_\alpha(t)$

On peut conclure que f est de classe C^2 sur I_α, $\forall \alpha \in]-1,0]$, et donc sur I et

$$\forall x \in I, \quad f''(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin t)(\sin t)^x\,\mathrm{d}t$$

De plus, $f' \leqslant 0$ et $f'' \geqslant 0$ montrent respectivement que f est décroissante et convexe sur I.

6.

L'équation 3 montre par continuité de f que

$$f(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{f(1)}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

7.

On a $f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$, puis

$$f(n+1)f(n+2) = \frac{n+1}{n+2}f(n)f(n+1)$$

permet de conclure par récurrence.

Par décroissance de f:

$$f(\lfloor x\rfloor - 1)f(\lfloor x\rfloor) = \frac{\pi}{2\lfloor x\rfloor} \leqslant f(x)^2 \leqslant f(\lfloor x\rfloor + 1)f(\lfloor x\rfloor + 2) = \frac{\pi}{2(\lfloor x\rfloor + 2)}$$

montre que

$$f^2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\lfloor x\rfloor} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

ou encore

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

8.

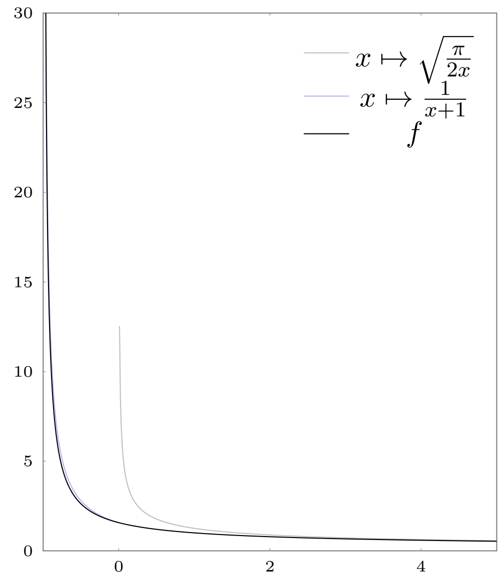

FIGURE 1. Représentation de f

9.

$t \mapsto \ln(\sin t)$ est C^0 par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\begin{aligned}\ln(\sin t) &\underset{t\to 0}{=} \ln(t + \mathrm{O}(t^3)) \\ &= \ln t + \ln(1 + \mathrm{O}(t^2)) \\ &= \ln t + \mathrm{O}(t^2)\end{aligned}$$

montre que

$$0 \leqslant |\ln(\sin t)^n| \underset{t\to 0^+}{\sim} |(\ln t)^n|$$

qui est intégrable en 0 (intégrales de Bertrand $\frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ avec $\alpha = 0 < 1$). Ainsi l'intégrale généralisée D_n est convergente.

Le changement de variable $\varphi(t) = -t + \frac{\pi}{2}$ montre que

$$\begin{aligned}D_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0 \frac{\pi}{2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

10.

D'après la question 5,

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) + \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t \sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\sin 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } \varphi(t) = 2t\text{)} \\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}f'(0) + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } \varphi(u) = u - \frac{\pi}{2}\text{)} \\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}f'(0)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f'(0) = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Soit $a > 0$.

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\sin t\,\mathrm{d}t &= [\,-\ln(\sin t)\cos t]_a^{\frac{\pi}{2}} + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln(\sin a)\cos a - \int_{\cos a}^{0} \frac{u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \ln(\sin a)\cos a - \int_{\cos a}^{0} \frac{u^2 - 1 + 1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \ln(\sin a)\cos a - \cos a - \int_{\cos a}^{0} \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \ln(\sin a)\cos a - \cos a - \frac{1}{2}\int_{\cos a}^{0} \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= \ln(\sin a)\cos a - \cos a - \frac{1}{2}[\,\ln(\frac{1+u}{1-u})]_{\cos a}^{0} \\
&= \ln(\sin a)\cos a - \cos a + \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\cos a}{1-\cos a}) \\
&= -\cos a + \frac{1}{2}\ln(1+\cos a) + \ln(\sin a)\cos a - \frac{1}{2}\ln(1-\cos a) \\
&= -\cos a + \frac{1}{2}\ln(1+\cos a) + \ln(a + \mathrm{o}(a))\cos a - \frac{1}{2}\ln(\frac{a^2}{2} + \mathrm{o}(a^2)) \\
&= -\cos a + \frac{1}{2}\ln(1+\cos a) + \ln a - \ln a + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(1 + \mathrm{o}(1))
\end{aligned}
$$

$$= \ln 2 - 1 + \mathrm{o}(1)$$

montre que

$$f'(1) = \ln 2 - 1$$

11.

On fait le changement de variable $u = \varphi(t) = -\ln(\sin t)$, $\varphi'(t) = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\sqrt{1-e^{-2u}}}{e^{-u}} = -\sqrt{e^{2u}-1}$, pour obtenir:

$$D_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,\mathrm{d}u$$

En suite on rappelle que

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u = n!$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^A u^{n+1} e^{-u}\,\mathrm{d}u = [-u^{n+1}e^{-u}]_0^A + (n+1)\int_0^A u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Le passage à la limite quand $A \to +\infty$ donne:

$$\int_0^{+\infty} u^{n+1} e^{-u}\,\mathrm{d}u = (n+1)\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

puis une récurrence immédiate

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u = n!$$

Or, pour $u \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} - \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}}} &= \frac{u^n(\sqrt{e^{2u}} - \sqrt{e^{2u}-1})}{\sqrt{e^{2u}-1}\sqrt{e^{2u}}} \\ &= \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}\sqrt{e^{2u}}(\sqrt{e^{2u}} + \sqrt{e^{2u}-1})} \\ &\leqslant \frac{u^n}{\sqrt{2u}\sqrt{e^{2u}}\sqrt{e^{2u}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-2u} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} u^n e^{-2u} \end{aligned}$$

On intègre cette relation:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (-1)^n D_n - \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-2u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}2^n} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } \varphi(u) = 2u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}2^n} n! \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,\mathrm{d}u \quad = \quad n! + \mathrm{O}(\frac{1}{2^n}n!)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} n! + \mathrm{o}(n!)$$

12.

Soit $x \in]-1,1[$, fixé.

$$\begin{aligned}(\sin t)^x &= e^{x\ln(\sin t)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n(\ln(\sin t))^n}{n!}\end{aligned}$$

On pose

$$f_n(t) = \frac{x^n(\ln(\sin t))^n}{n!}$$

On observe que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t &= (-1)^n\frac{|x|^n}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin t))^n\,\mathrm{d}t\\ &= (-1)^n\frac{|x|^n}{n!}D_n\end{aligned}$$

est le terme d'une série convergente car $(-1)^n D_n \sim n!$ et $|x| < 1$.

i $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est C^0 par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, intégrable.

ii La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CV simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction C^0 par morceaux $t \mapsto (\sin t)^x$.

iii La série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme nous permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin t)^n\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

13.

Comme $a > 0$ et $b > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x > 0$, ce qui montre que ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{-2a^2\sin x\cos x + 2b^2\cos x\sin x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\\ &= \frac{(-a^2+b^2)2\cos x\sin x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\left|\rho e^{2ix}\right| = |\rho| < 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k e^{2ixk} &= \rho e^{2ix} \frac{1}{1-\rho e^{2ix}} \\
&= \rho e^{2ix} \frac{1-\rho e^{-2ix}}{(1-\rho\cos(2x))^2 + \rho^2\sin^2(2x)} \\
&= \rho \frac{e^{2ix}-1}{(1-\rho\cos(2x))^2 + \rho^2\sin^2(2x)} \\
&= \rho \frac{\cos(2x) - 1 + i\sin(2x)}{((1-\rho\cos(2x))^2 + \rho^2\sin^2(2x)}
\end{aligned}$$

Puis:

$$\begin{aligned}
(1-\rho\cos(2x))^2 + \rho^2\sin^2(2x) &= \rho^2 + 1 - 2\rho\cos(2x) \\
&= \rho^2 + 1 - 2\rho(\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= (\rho^2+1)(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\rho(\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= (\rho^2 + 1 - 2\rho)\cos^2 x + (\rho^2 + 1 + 2\rho)\sin^2 x \\
&= (\rho-1)^2\cos^2 x + (\rho+1)^2\sin^2 x \\
&= \frac{4}{(a+b)^2}(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
4\operatorname{Im}(\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k e^{2ixk}) &= \frac{b-a}{b+a}(a+b)^2 \frac{\sin(2x)}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin(2x)(b^2-a^2)}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \\
&= \psi'(x)
\end{aligned}$$

On peut bien conclure que

$$\psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

14.

La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \rho^k \sin(2kx)$ converge normalement car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\rho^k \sin(2kx)\right| = \rho^k$$

qui est le terme géneral d'une série convergente. On a en particulier convergence uniforme sur tout segment, donc on peut écrire

$$\begin{aligned}
\psi(x) - \underbrace{\psi(0)}_{=2\ln a} = 4\int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kt)\,\mathrm{d}t &= 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \int_0^x \sin(2kt)\,\mathrm{d}t \\
&= 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k (-\frac{\cos(2kx)}{2k} + \frac{1}{2k})\,\mathrm{d}t \\
&= -2\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{1}{k} \\
&= -2\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} - 2\ln(1-\rho) \\
&= -2\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} - 2\ln 2 - 2\ln a + 2\ln(a+b)
\end{aligned}$$

15.

On applique l'égalité de Parseval à la fonction π périodique ψ, puisque on vient d'obtenir son développement en séries trigonométriques:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi^2(t)\,\mathrm{d}t &= 4(\ln\frac{a+b}{2})^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} 4\frac{\rho^{2k}}{k^2} \\
&= 4(\ln\frac{a+b}{2})^2 + 2\sigma(\rho^2)
\end{aligned}$$

Posons

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k \cos(2kt)$$

avec

$$a_k = \begin{cases} 2\ln\dfrac{a+b}{2} & \text{si } k = 0 \\ -2\dfrac{1}{k} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

On remarque déjà que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_k| \leqslant \underbrace{2\max\{\left|\ln\frac{a+b}{2}\right|, 1\}}_{=M}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, fixé. La somme $\sum_{k\geqslant 0} a_k \rho^k \cos(2kt)$ CV absolument, donc aussi son produit de cauchy avec elle-même et on a

$$\psi^2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \rho^n a_k a_{n-k} \cos(2kx)\cos(2(n-k)x)$$

La convergence de cette dernière série est normale, car

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} \rho^n a_k a_{n-k} \cos(2kx)\cos(2(n-k)x)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \rho^n |a_k|\,|a_{n-k}| \\ &\leqslant M^2(n+1)\rho^n\end{aligned}$$

qui est le terme d'une série convergente.

On a donc convergence uniforme sur tout segment $[0,\pi]$ et on peut écrire

$$\int_0^\pi \psi^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \rho^n a_k a_{n-k} \int_0^\pi \cos(2kt)\cos(2(n-k)t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Or la formule de linéarisation

$$\cos(2kt)\cos(2(n-k)t) = \frac{1}{2}(\cos(2nt)+\cos(2(n-2k)t)$$

montre que

$$\int_0^\pi \cos(2kt)\cos(2(n-k)t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi & \text{si } n=k=0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n>0 \wedge n-k=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, intégrer cos sur un multiple entier non nul de périodes donne 0.

Simplifions l'égalité 4:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \psi^2(t)\,\mathrm{d}t &= a_0^2\pi + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{2n} a_n^2 \\ &= 4\pi(\ln\frac{a+b}{2})^2 + 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\rho^{2n} \\ \int_0^\pi \psi^2(t)\,\mathrm{d}t &= 4\pi(\ln\frac{a+b}{2})^2 + 2\pi\sigma(\rho^2)\end{aligned}$$

16.

La séries de fonctions ψ_n converge simplement vers la fonction $t \mapsto 2\ln(\sin t)$.

De plus on sait que

$$\psi_n'(t) = \frac{(b_n^2 - a_n^2)\sin 2t}{a_n^2\cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}$$

Cela montre que ψ_n est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$. On a $\psi_n(\frac{\pi}{2}) = 2\ln b_n = 2\ln\frac{n}{n+1} < 0$.

Par ailleurs, on peut écrire:

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= \ln(a_n^2 + (b_n^2 - a_n^2)\sin^2 t) \\ &\geqslant \ln((b_n^2 - a_n^2)\sin^2 t) \\ &= \ln(\frac{n^2-1}{(n+1)^2}\sin^2 t) \\ &\geqslant \ln(\frac{1}{2}\sin^2 t) \qquad \text{(pour } n \geqslant 2)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\forall t \in]0,\pi], \quad -\ln 2 + 2\ln(\sin t) \leqslant \psi_n(t) \leqslant \ln\frac{n}{n+1} < 0 \\ \Rightarrow &\forall t \in]0,\pi], \qquad |\psi_n(t)| \leqslant \ln 2 - 2\ln(\sin t) \end{aligned}$$

On a maintenant tous les éléments pour appliquer le théorème de convergence dominée:

i $\forall n \geqslant 2, \quad \forall t \in]0,\pi], \quad \left|\psi_n^2(t)\right| \leqslant (\ln 2 - 2\ln(\sin t))^2$, intégrable sur $]0,\pi]$ d'après la question 9.

ii la suite de fonction (ψ_n^2) converge simplement sur $]0,\pi]$ vers la fonction $t \mapsto 4(\ln(\sin t))^2$.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\int_0^\pi \psi_n^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \psi_n^2(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^\pi (\ln(\sin t))^2\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

Mais d'après la question 15, on a

$$\int_0^\pi \psi_n^2(t)\,\mathrm{d}t = 4\pi(\ln\frac{a_n+b_n}{2})^2 + 2\pi\sigma(\rho_n^2) \tag{6}$$

On a la convergence normale de la série de fonction $\sum_{k\geqslant 1}\frac{x^k}{k^2}$ sur $[-1,1]$ car $\sup_{[-1,1]}\frac{|x^k|}{k^2} = \frac{1}{k^2}$ qui est le terme d'une série qui converge. Donc la somme σ est en particulier continue en 1 et si on fait tendre $n \to +\infty$ dans 6, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \psi_n^2(t)\,\mathrm{d}t &= 4\pi(\ln 2)^2 + 2\pi\sigma(1) \\ &= 4\pi(\ln 2)^2 + \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

Mais comme le montre la question 5 ainsi que le changement de variable $\varphi(t) = t - \frac{\pi}{2}$, on a

$$4\int_0^\pi (\ln(\sin t))^2\,\mathrm{d}t = 8f''(0)$$

L'égalité 5 permet de conclure:

$$f''(0) = \pi\frac{(\ln 2)^2}{2} + \frac{\pi^3}{24}$$

17.

Par composition $g = \ln\circ f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

puis

$$g''(t) = \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\begin{aligned}(f'(t))^2 = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)(\sin u)^t \,\mathrm{d}u\right)^2 &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\sqrt{(\sin u)^t}\sqrt{(\sin u)^t}\,\mathrm{d}u\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin u))^2(\sin u)^t \,\mathrm{d}u \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^t \,\mathrm{d}u \\ &= f''(t)f(t)\end{aligned}$$

Donc $g'' \geqslant 0$ et f est ln-convexe.

18.

soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question 5,

$$f(2(x+p+1)) = \frac{2x+2p+1}{2x+2p+2} f(2(x+p))$$

Puis par une récurrence immédiate,

$$f(2(x+p)) = \frac{(2x+2p-1)(2x+2p-3)\dots(2x+1)}{(2x+2p)(2x+2p-2)\dots(2x+2)} f(2x)$$

On prend le logarithme de cette égalité pour obtenir, avec la convention qu'une somme sans terme vaut 0:

$$\tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$$

19.

Une conséquence directe de la convexité de $\tilde{f}$ est que $\forall y \in \mathbb{R}^+$ fixé, l'application

$$\begin{aligned}[-y, +\infty[\setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\tilde{f}(y+x) - \tilde{f}(y)}{x}\end{aligned}$$

est croissante.

soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\quad x \leqslant p$. On a donc directement:

$$\begin{aligned}&\frac{\tilde{f}(-1+n) - \tilde{f}(n)}{-1} \leqslant \frac{\tilde{f}(x+n) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(p+n) - \tilde{f}(n)}{p} \\ \Leftrightarrow &-\tilde{f}(-1+n) + \tilde{f}(n) \leqslant \frac{\tilde{f}(x+n) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(p+n) - \tilde{f}(n)}{p} \qquad (7)\end{aligned}$$

soit $m \in [\![-n, +\infty[\![$, un entier fixé.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(m+n) - \tilde{f}(n) &= \ln(\frac{f(2m+2n)}{f(2n)}) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4(m+n)}} + \mathrm{o}(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}} + \mathrm{o}(\frac{1}{\sqrt{n}})}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{\frac{n}{m+n}}(1+\mathrm{o}(1))\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(\frac{n}{m+n}) + \ln(1+\mathrm{o}(1)) \\
&= \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

A noter pour la suite que la relation obtenue en 18 permet aussi facilement d'obtenir la même conclusion.

On applique à $m = -1$ et $m = p$ et on passe à la limite dans l'encadrement 7, pour avoir

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(x+n) - \tilde{f}(n) = 0$$

20.

Soit h une application de I dans $\mathbb{R}$ ln-convexe, avec $h(0) = \frac{\pi}{2}$ et

$$\forall x \in I, \quad h(x+2) = \frac{x+1}{x+2}h(x)$$

on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(2(x+1)) = \frac{2x+1}{2x+2}h(2x)$$

puis d'après le raisonnement des questions 18 et 19, $\tilde{h}(n+x) - \tilde{h}(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ car la relation obtenue en 18 permet aussi de montrer facilement que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \tilde{h}(n+p) - \tilde{h}(n) &= \lim_{n\to+\infty} \tilde{h}(n-1) - \tilde{h}(n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{h(2n+2x)}{h(2n)} &\underset{n\to+\infty}{\to} 1 \\
\Leftrightarrow h(2n+2x) &\sim h(2n)
\end{aligned}$$

On obtient le même résultat pour f. Mais alors

$$\begin{aligned}
h(2n) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}h(0) \\
&\sim \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}h(0) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}f(0) \\
&\sim f(2n+2x)
\end{aligned}$$

On a montré

$$\begin{aligned} & h(2n+2x) \sim f(2n+x) \\ \Leftrightarrow & \frac{(2x+2n-1)(2x+2n-3)\dots(2x+1)}{(2x+2n)(2x+2n-2)\dots(2x+2)} h(2x) \sim \frac{(2x+2n-1)(2x+2n-3)\dots(2x+1)}{(2x+2n)(2x+2n-2)\dots(2x+2)} f(2x) \\ \Leftrightarrow & h(2x) = f(2x) \end{aligned}$$

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(x) = f(x)$. Maintenant si $x \in]-1, 0]$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x+2}{x+1} h(\underbrace{x+2}_{\geqslant 0}) \\ &= \frac{x+2}{x+1} f(x+2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc $h = f$ et on a l'unicité.

Plus généralement, le raisonnement de cette question montre que les fonctions ln-convexe vérifiant l'équation fonctionelle de f sont les fonctions

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{R}^{+*} \\ t &\mapsto \lambda f, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

21.

Les calculs seront exactement les mêmes que dans les questions 18, 19, 20, "en remplaçant 1 par T", cela ne pose pas de difficultés supplémentaires de montrer que les fonctions de $]-T, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in]-T, +\infty[, \quad (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

sont les fonctions de la forme:

$$\begin{aligned}]-T, +\infty[&\to \mathbb{R}^{+*} \\ t &\mapsto \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{\frac{t}{T}} \, du, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

Il s'agit juste ici de faire une dilatation de l'axe des t d'un facteur T. Plus précisément:

Il est direct que h ln-convexe $\Leftrightarrow h(T.) : t \mapsto h(Tt)$ est ln-convexe.

Puis on a

$$\begin{aligned} & \forall t \in]-T, +\infty[, \quad h(t)(t+T) = (t+2T)h(t+2T) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in]-1, +\infty[, \quad h(Tt)(Tt+T) = (Tt+2T)h(Tt+2T) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in]-1, +\infty[, \quad h(Tt)(t+1) = (t+2)h(T(t+2)) \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \forall t \in]-1, +\infty[, \quad h(Tt) = \lambda f(t) \end{aligned}$$

22.

L'égalité avec h ln-convexe

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$$

est impossible pour des raisons de signe car $h > 0$ et pour $t \in]-2T, -T[$ on a $t + 2T > 0$ et $t + T < 0$.