Mathématiques 2

MP, MPI

2023

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Notations

— Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.

— Étant donnés deux entiers naturels a et b, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

— Pour deux suites de nombres réels $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, la notation $u_m = O(v_m)$ signifie qu'il existe une suite bornée $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que l'on ait

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall m \geqslant m_0, \quad u_m = M_m v_m.$$

— On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I Résultats préliminaires

I.A – Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

I.A.1)

Q 1. Montrer que

$$I_n \geqslant \frac{1}{2^n}.$$

Q 2. Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

Q 3. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right).$$

On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1.

Q 4. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$I_n \sim K_n.$$

Q 5. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n}K_n$.

Q 6. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.A.2)

Q 7. Justifier que

$$\sqrt{n}\, I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u.$$

Q 8. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Q 9. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{puis de} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} \qquad \text{et} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.B – Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. En écrivant que $\varphi(t) \leqslant \frac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geqslant x$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Q 11. À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 12. En déduire un équivalent simple de $1-\Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.C – Une inégalité maximale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et $Z_1, ..., Z_n$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $R_p = \sum_{i=1}^{p} Z_i$.

On va montrer la propriété

$$\forall x > 0, \qquad \mathbb{P}(\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\}) \leqslant 3 \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}(\{|R_p| \geqslant x\}).$$

On admet que les différentes fonctions intervenant dans cette inégalité sont bien des variables aléatoires discrètes.

Pour simplifier, notons A l'événement $\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\}$. Ainsi,

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \max_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p(\omega)| \geqslant 3x\}.$$

Dans le cas où $n \geqslant 2$, définissons de plus les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geqslant 3x\} \qquad \text{et} \qquad A_p = \{\max_{1 \leqslant i \leqslant p-1} |R_i| < 3x\} \cap \{|R_p| \geqslant 3x\}$$

pour $p \in [\![2, n]\!]$.

Q 13. Exprimer l'événement A à l'aide des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Q 14. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}).$$

Q 15. Justifier que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a l'inclusion

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \ \subset \ A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}.$$

Q 16. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}).$$

Q 17. Conclure.

II Étude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}.$$

De plus, on définit la fonction $B_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les conditions

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \left]-\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, && B_n(x) = 0 \\
\forall k \in [\![0, n]\!],\ &\forall x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, && B_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \\
&\forall x \in \left[\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[, && B_n(x) = 0
\end{aligned}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ, définie dans la partie I. Autrement dit, on souhaite montrer

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta_n = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

L'usage d'une figure pour appréhender la problématique de cette partie sera vivement apprécié.

II.A –

Q 18. Comparer les réels $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$.

Q 19. Justifier l'existence du réel Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 20. Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$\Delta_n = \sup_{x \geqslant 0} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

Q 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que B_n est une application décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra distinguer selon que n est pair ou impair.

Dans la suite de cette partie, on fixe $\varepsilon > 0$. La limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ assure de l'existence d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

II.B – Dans cette sous-partie, on va montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

On introduit pour cela l'ensemble

$$I_n = \{k \in [\![0,n]\!] \mid x_{n,k} \in [0,\ell+1]\}$$

dont on peut vérifier que c'est un intervalle d'entiers.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que n et k varient de sorte que $k \in I_n$.

Q 22. Montrer que l'on a

$$k!(n-k)! = 2\pi \mathrm{e}^{-n} k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pour n tendant vers l'infini.

On pourra utiliser la formule de Stirling rappelée en début d'énoncé.

Q 23. En déduire que, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}.$$

Q 24. En déduire que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}$$

puis que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Q 25. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1$,

$$\sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

II.C –

Q 26. Pour tout $\ell > 0$, montrer qu'il existe un entier naturel n_2, tel que, pour tout $n \geqslant n_2$,

$$B_n(\ell) \leqslant 2\varphi(\ell).$$

Q 27. Conclure que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

III Applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X. On définit alors

$$S_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On admettra que pour tout $n \geqslant 1$, S_n est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

III.A – Théorème central limite

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f également continue par morceaux sur I.

Q 28. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (respectivement $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est une suite de nombres réels appartenant à I qui converge vers $u \in I$ (respectivement $v \in I$), montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ et $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Q 29. Montrer que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\{T_n = j\}) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $x_{n,j}$ a été défini dans la partie II.

Considérons un couple (u,v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{ j \in [\![0,n]\!] \mid \frac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant j \leqslant \frac{n+v\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

Q 30. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right\}\right) = \sum_{j\in J_n} \mathbb{P}(\{T_n = j\}).$$

Q 31. En déduire que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right\}\right) = \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)$$

où les applications φ et Φ ont été définies dans la partie I.

III.B – Critère de tension

Dans cette dernière sous-partie, on fixe $\varepsilon \in]0,1[$.

Q 32. Montrer qu'il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que l'on ait

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_x, \quad x^2\mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon.$$

Q 33. Pour x_0 et x comme à la question précédente, on fixe $N \geqslant \dfrac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geqslant N$. Montrer qu'alors

$$x^2\mathbb{P}(\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\}) \leqslant 3\varepsilon.$$

• • • FIN • • •