

CONCOURS MINES-PONTS 2023
MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/). 

1.

Supposons $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. On rappelle que les valeurs propres d'une matrices $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ sont réelles; soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S , et $X (\neq 0)$ un vecteur propre associé

$$\begin{aligned}\langle SX, X \rangle &= (SX)^T X \\ &= \lambda X^T X \\ &= \lambda \|X\|^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda = \frac{\langle SX, X \rangle}{\|X\|^2} \geq 0$$

Cela montre que $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, supposons $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$. On peut diagonaliser en base orthonormale

$$\begin{aligned}S &= Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} Q^T \\ &= QDQ^T\end{aligned}$$

avec Q orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle SX, X \rangle &= X^T SX \\ &= X^T QDQ^T X \\ &= (Q^T X)^T DQ^T X \\ &= Q^T X^T DQ^T X \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \geq 0\end{aligned}$$

où

$$Q^T X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

On a bien $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2.

Soit $(S_1, S_2) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle ((1-t)S_1 + tS_2)X, X \rangle &= X^T S X \\ &= (1-t) \underbrace{\langle S_1 X, X \rangle}_{\geq 0} + t \underbrace{\langle S_2 X, X \rangle}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est positive par convexité de l'ensemble \mathbb{R}^+ . Donc $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.

Similairement, soit $(S_1, S_2) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle ((1-t)S_1 + tS_2)X, X \rangle &= X^T S X \\ &= (1-t) \underbrace{\langle S_1 X, X \rangle}_{>0} + t \underbrace{\langle S_2 X, X \rangle}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement positive par convexité de l'ensemble \mathbb{R}^{+*} . Donc $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

Ces ensembles ne sont pas des espaces vectoriels puisqu'ils contiennent I_n mais pas $-I_n$.

3.

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned} A &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= S^2 \end{aligned}$$

avec U orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. La matrice

$$\begin{aligned} S &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^{-1} \end{aligned}$$

est une matrice symétrique réelle vérifiant $Sp(S) = \{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ et donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4.

La propriété est triviale pour $p = 1$ et correspond à la définition de la convexité d'une fonction pour $p = 2$. Soit maintenant $p > 2$. si $\lambda_p = 1$ on est ramené au cas trivial $p = 1$ donc on peut

supposer $\lambda_p < 1$. On peut ainsi écrire:

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j = (1 - \lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \underbrace{\frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p}}_{\lambda'_j} x_j + \lambda_p x_p$$

En appliquant une première fois la propriété avec $p = 2$ on obtient:

$$f\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\right) \leq (1 - \lambda_p) f\left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p} x_j\right) + \lambda_p f(x_p)$$

En appliquant une deuxième fois la propriété (hypothèse de récurrence) puisqu'on remarque que $\sum_{j=1}^{p-1} \lambda'_j = 1$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\right) &\leq (1 - \lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p} f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^p \lambda_j f(x_j) \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang p et on peut conclure.

5.

La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^{+*} et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$$

ce qui montre que la fonction est convexe sur \mathbb{R}^{+*} . Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ les valeurs propres de M répétées avec leur ordre de multiplicité. On a

$$\begin{aligned} \text{Tr } M &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \det M &= \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

Si $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$, la propriété est triviale. On peut maintenant supposer que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. On applique alors le résultat de la question précédente à la fonction f

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{j=1}^p \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq \sum_{j=1}^p \frac{1}{n} f(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow -\ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq -\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow -\ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \ln\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j^{\frac{1}{n}}\right) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j &\geq \left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right)^{\frac{1}{n}} \\
 \Leftrightarrow \frac{\text{Tr } M}{n} &\geq (\det M)^{\frac{1}{n}}
 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

6.

Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 M &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\
 &= U D U^T
 \end{aligned}$$

avec U orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } M^T M &= \text{Tr } U D \underbrace{U^T U}_{=I_n} D U^T \\
 &= \text{Tr } U D^2 U^T \\
 &= \text{Tr } D^2 U^T U \\
 &= \text{Tr } D^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2
 \end{aligned}$$

Donc

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$

7.

On peut noter que le résultat précédent est valable pour les matrices de $S_n(\mathbb{R})$. Ensuite, en notant $\rho(M) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$, on a

$$\begin{aligned}\|M\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \\ &\geq \sqrt{\rho(M)^2} \\ &= \rho(M)\end{aligned}$$

De plus, la diagonalisation de la matrice $M - \det^{\frac{1}{n}}(M)I_n$ s'obtient facilement à l'aide de celle de M :

$$\begin{aligned}M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \det^{\frac{1}{n}}(M) \end{bmatrix} U^T \\ &= U(D - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n)U^T\end{aligned}$$

ce qui permet en particulier de déterminer son spectre. On peut maintenant appliquer directement la formule de l'énoncé aux valeurs propres de $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$:

$$2\rho(M)\left(\frac{\text{Tr } M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}}\right) \geq \frac{1}{n}\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\|^2$$

Comme $\rho(M) > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\text{Tr } M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}} &\geq \frac{\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\|^2}{2n\rho(M)} \\ &\geq \frac{\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\|^2}{2n\|M\|}\end{aligned}$$

8.

On commence par suivre l'indication de l'énoncé en utilisant le résultat de la question 3:

$$\begin{aligned}A &= S^2 \\ &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= U D_1 D_1 U^T \\ &= (U D_1)(U D_1)^T\end{aligned}$$

On est alors tenté de choisir $Q' = U D_1$ pour répondre à la question posée; toutefois il n'y a peu de chance que ce choix fournisse la forme souhaitée pour la matrice B car on ne l'a pas fait encore

intervenir dans le raisonnement. Essayons:

$$\begin{aligned} Q'^{-1}B(Q'^T)^{-1} &= (UD_1)^{-1}B((UD_1)^T)^{-1} \\ &= D_1^{-1}U^{-1}B((U^T)^{-1}((D_1^T)^{-1}) \\ &= D_1^{-1}U^T BUD_1^{-1} \\ &= B' \end{aligned}$$

Cette matrice B' n'est a priori pas diagonale, par contre elle est symétrique et donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale D :

$$\exists V \in O_n(\mathbb{R}), \quad B' = VDV^T$$

On peut alors voir que

$$\begin{aligned} \forall W \in O_n(\mathbb{R}), \quad A &= UD_1 \underbrace{WW^T}_{=I_n} D_1 U^T \\ &= (UD_1 W)(UD_1 W)^T \end{aligned}$$

Le choix qui s'impose est donc $W = V$, soit $Q = Q'V = UD_1V \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} Q^{-1}B(Q^T)^{-1} &= V^T Q'^{-1}B(Q'^T)^{-1}V \\ &= V^T B'V \\ &= D \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T B X > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T Q D Q^T X > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad (Q^T X)^T D (Q^T X) > 0 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Comme $Q^T \in GL_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} Q^T M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} &= \{QX, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\} \\ &= M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T D X > 0 \\ &\Leftrightarrow D \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow Sp(D) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

9.

10.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ les valeurs propres de D répétées avec leur ordre de multiplicité. La décomposition précédente permet d'écrire

$$\begin{aligned} A + B &= QQ^T + QDQ^T \\ &= Q \left(I_n + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \right) Q^T \\ &= Q \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n \end{bmatrix} Q^T \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \det(A + B) &= \det(QQ^T + QDQ^T) \\ &= \det Q \det \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n \end{bmatrix} \det Q^T \\ &= \det Q^2 \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right) \end{aligned}$$

$$(\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} = \det Q^{\frac{2}{n}} \left(1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \right)$$

Donc:

$$\begin{aligned} (\det(A + B))^{\frac{1}{n}} &\geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \det Q^{\frac{2}{n}} \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \det Q^{\frac{2}{n}} \left(1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \right) \quad (> 0) \\ &\Leftrightarrow \ln \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \ln \left(1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq \ln \left(1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda_i) \geq \ln \left(1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{\ln \lambda_i}) \geq \ln \left(1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i} \right) \end{aligned}$$

Un peu d'observation convainc que la dernière inégalité est la traduction (en utilisant le résultat de 4 avec $x_i = \ln \lambda_i$) de la convexité de la fonction $g : x \mapsto \ln(1 + e^x)$, démontrée dans la question 9.

11.

On applique la question précédente qui nous donne l'inégalité

$$\begin{aligned} (\det((1-t)A + tB))^{\frac{1}{n}} &\geq (\det(1-t)A)^{\frac{1}{n}} + (\det tB)^{\frac{1}{n}} \\ &= (1-t)(\det A)^{\frac{1}{n}} + t(\det B)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la multilinéarité du déterminant.

Vu l'allure du résultat avec les t en exposant et le produit des déterminants, il semble naturel à ce stade d'essayer de prendre le \ln de l'inégalité:

$$\frac{1}{n} \ln \det((1-t)A + tB) \geq \ln[(1-t)(\det A)^{\frac{1}{n}} + t(\det B)^{\frac{1}{n}}] \quad \textcircled{2}$$

La fonction \ln est concave sur \mathbb{R}^{+*} , donc

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\geq (1-t) \ln((\det A)^{\frac{1}{n}}) + t \ln((\det B)^{\frac{1}{n}}) \\ &= \frac{1}{n} [(1-t) \ln(\det A) + t \ln(\det B)] \\ &= \frac{1}{n} [\ln((\det A)^{(1-t)}) + \ln((\det B)^t)] \\ &= \frac{1}{n} \ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^t) \end{aligned}$$

On a donc montré

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{n} \ln \det((1-t)A + tB) &\geq \frac{1}{n} \ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^t) \\ \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \ln \det((1-t)A + tB) &\geq \ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^t) \\ \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \det((1-t)A + tB) &\geq (\det A)^{(1-t)}(\det B)^t \end{aligned}$$

A noter que le sens qu'il faut donner à l'expression $\det A^{(1-t)} \det B^t$ de l'énoncé n'est pas très clair pour $t \notin \mathbb{Z}$.

12.

La démonstration dans la question précédente a montré que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall (A, B) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2, \quad \ln \det((1-t)A + tB) \geq (1-t) \ln(\det A) + t \ln(\det B)$$

i.e. la fonction $\ln \circ \det$ est concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

13.

On rappelle que le polynôme caractéristique de la matrice A est:

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det(A - tI_n) \\ &= (-1)^n \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i) \end{aligned}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A . Donc,

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i t) &= \prod_{i=1}^n t \left(\frac{1}{t} + \lambda_i \right) \\
 &= (-1)^n t^n \prod_{i=1}^n \left(-\frac{1}{t} - \lambda_i \right) \\
 &= (-1)^n t^n (-1)^n P_A \left(-\frac{1}{t} \right) \\
 &= t^n \det \left(A + \frac{1}{t} I_n \right) \\
 &= t^n \det \left(A + \frac{1}{t} I_n \right) \\
 &= t^n \left(\frac{1}{t} \right)^n \det (tA + I_n) \quad \textcircled{3} \\
 &= g(t)
 \end{aligned}$$

On a utilisé la multilinéarité du déterminant (ou linéarité par rapport aux colonnes) en $\textcircled{3}$. L'égalité est bien sur toujours vraie pour $t = 0$. g est donc une fonction polynôme, de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

14.

Puisque $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0$. Donc, $\forall t \in \mathbb{R}^+, (1 + \lambda_i t) > 0$ et $g(t) > 0$ et:

$$\begin{aligned}
 \ln g(t) &= \ln \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i t) \\
 &= \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda_i t) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i t \quad (\ln(1 + x) \leq x) \textcircled{4} \\
 &= t \sum_{i=1}^n \lambda_i \\
 &= t \operatorname{Tr} A
 \end{aligned}$$

On a utilisé une inégalité (de convexité) bien connue en $\textcircled{4}$.

15.

On pose $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $M = (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Il suffit de revenir à la formule de Leibniz du déterminant

$$f_A(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (a_{i, \sigma(i)} + t m_{i, \sigma(i)})$$

où \mathfrak{S}_n est le groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$ la signature de σ , pour voir que la fonction f_A est une fonction polynôme; elle est donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned}
 f_A(t) &= \det(A + tM) = \det(A(I_n + tA^{-1}M)) \\
 &= \det(A) \det(I_n + tA^{-1}M)
 \end{aligned}$$

et utiliser la question 13.

16.

On peut déjà noter que si $M = 0$, c'est évident donc on suppose dans la suite de la question que $M \neq 0$.

Puisque A et M sont symétriques, $A + tM$ l'est aussi. De plus si on reprend la décomposition et les notations de la question 8 avec $B = M \in S_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} A + tM &= QQ^T + tQDQ^T \\ &= Q \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n t \end{bmatrix} Q^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle (A + tM)X, X \rangle &= X^T (A + tM)X \\ &= X^T Q \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n t \end{bmatrix} Q^T X \\ &= \sum_{j=1}^n (1 + \lambda_j t) y_j^2 \end{aligned}$$

où

$$Q^T X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La quantité $\sum_{j=1}^n (1 + \lambda_j t) y_j^2$ est strictement positive si on s'arrange pour que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad 1 + \lambda_i t > 0$ et $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad y_i \neq 0$. La deuxième condition est vérifiée si $X \neq 0$ car $Q \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour la première, il suffit de se restreindre à des petites valeurs de t , précisément

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad 1 + \lambda_i t > 0 \Leftrightarrow |t| < \min_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \lambda_i \neq 0}} \frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{1}{\max_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \lambda_i \neq 0}} |\lambda_i|} = \frac{1}{\rho(D)} = \epsilon_0 > 0$$

où $\rho(D)$ est le rayon spectral défini en 7.

On a donc démontré:

$$\forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[\quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle (A + tM)X, X \rangle = \sum_{j=1}^n (1 + \lambda_j t) y_j^2 > 0$$

i.e.

$$\forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad A + tM \in S_n^{++}$$

17.

$$A + tM = A(I_n + A^{-1}M)$$

donc

$$\begin{aligned} f_A(t) &= \det(A + tM) = \det(A(I_n + tA^{-1}M)) \\ &= \det(A) \det(I_n + tA^{-1}M) \end{aligned}$$

En notant $A^{-1}M = (c_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$,

$$I_n + tA^{-1}M = \begin{bmatrix} 1 + c_{11}t & c_{12}t & \dots & c_{n1}t \\ c_{21}t & 1 + c_{22}t & \dots & c_{2n}t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}t & c_{n2}t & \dots & 1 + c_{nn}t \end{bmatrix}$$

Quand on calcule le déterminant de cette matrice en utilisant la formule de Leibniz, les seuls termes de degré 1 en t sont obtenus en restant sur la diagonale (terme correspondant à $\sigma = \text{id}$ dans la formule), on choisit une et une seule fois un $c_{ii}t$ que l'on multiplie par les seuls termes constants restants à savoir les 1 (les seuls éléments constants dans la matrice sont les 1 de la diagonale et éventuellement des 0). Dans la fonction polynomiale $\det(I_n + A^{-1}Mt)$, le terme de degré 1 en t est donc

$$\begin{aligned} c_{11}t \times \underbrace{1 \times \dots \times 1}_{n-1 \text{ fois}} + 1 \times c_{22}t \times 1 \times \dots \times 1 + \dots + 1 \times \dots \times 1 \times c_{nn}t &= t \sum_{i=1}^n c_{ii} \\ &= \text{Tr}(A^{-1}M)t \end{aligned}$$

Il est clair que le terme constant dans $\det(I_n + A^{-1}Mt)$ s'obtient d'une seule manière et vaut 1 (c'est $\det I_n$).

Alternativement on pouvait se servir de la formule de la question 13.

On a donc

$$\det(I_n + tA^{-1}M) = 1 + \text{Tr}(A^{-1}M)t + \alpha t^2 + \dots + \beta t^n$$

puis,

$$\begin{aligned} f_A(t) = \det A \det(I_n + tA^{-1}M) &= \det A + \det A \text{Tr}(A^{-1}M)t + \det A \alpha t^2 + \dots + \det A \beta t^n \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \det A + \det A \text{Tr}(A^{-1}M)t + o(t) \end{aligned}$$

18.

Le développement limité d'ordre 1 en 0 que l'on vient d'obtenir montre que la fonction f_A est dérivable en 0, et que $f'_A(0) = \det A \text{Tr}(A^{-1}M)$.

Soit $t_0 \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, fixé. L'idée est d'utiliser le fait que $A + t_0M \in S_n^{++}$ pour décaler l'origine des t puisque l'on sait dériver en 0:

$$\begin{aligned} f_A(t) = \det(A + tM) &= \det(\underbrace{A + t_0M}_{\in S_n^{++}} + (t - t_0)M) \\ &= f_{A+t_0M}(t - t_0) \end{aligned}$$

D'après la question précédente (en remplaçant A par $A + t_0M$), on sait que la fonction f_{A+t_0M} est dérivable en 0 et que $f'_{A+t_0M}(0) = \det(A + t_0M) \text{Tr}((A + t_0M)^{-1}M)$.

Par composition, la fonction f_A est dérivable en t_0 et $f'_A(t_0) = \det(A + t_0M) \text{Tr}((A + t_0M)^{-1}M)$

$$\forall t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad f'_A(t) = \det(A + tM) \text{Tr}((A + tM)^{-1}M)$$

19.

On sait que

$$\forall t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\det(A + tM)} C^T$$

où $C = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est la matrice des cofacteurs, Δ_{ij} est le déterminant de la matrice $A + tM$ privé de la ligne i et de la colonne j . Cette expression montre que Φ est une fonction

rationnelle, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $] -\epsilon_0, \epsilon_0[$. Φ est donc de classe C^∞ sur $] -\epsilon_0, \epsilon_0[$ (cette justification n'était pas demandée).

Φ admet donc un développement limité d'ordre 1 en 0:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} \Phi(0) + \Phi'(0)t + o(t) \\ \Phi(t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} A^{-1} + \Phi'(0)t + o(t)\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times (A + tM) &= I_n \\ \Leftrightarrow \forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A &= I_n - t\Phi(t) \times M \\ \Leftrightarrow \forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A &= I_n - t\Phi(t) \times M \\ \Leftrightarrow \forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A &= I_n - t(A^{-1} + \Phi'(0)t + o(t))M \\ \Leftrightarrow \forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A &= I_n - tA^{-1}M - t^2\Phi'(0)M + t o(t) \times M \\ \Leftrightarrow \forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A &= I_n - tA^{-1}M - \underbrace{t^2\Phi'(0)M + t o(t) \times M}_{o(t)} \\ \Leftrightarrow \forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A &= I_n - tA^{-1}M + o(t) \\ \Leftrightarrow \forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) &= A^{-1} - tA^{-1}MA^{-1} + o(t)\end{aligned}$$

Ce développement limité en 0 montre en passant que $\Phi'(0) = -A^{-1}MA^{-1}$.

20.

Soit

$$\begin{aligned}h_\alpha : \mathbb{R}^{+*} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\alpha}x^{-\alpha}\end{aligned}$$

h_α est de classe C^∞ . Comme $\varphi_\alpha = h_\alpha \circ f_A$, et $f_A(] -\epsilon_0, \epsilon_0[) \subset \mathbb{R}^{+*}$, φ_α est bien définie et dérivable sur $] -\epsilon_0, \epsilon_0[$ d'après ce qui précède et

$$\begin{aligned}\forall t \in] -\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) &= f'_A(t)h'_\alpha(f_A(t)) \\ &= -\det(A + tM) \operatorname{Tr}((A + tM)^{-1}M)(\det(A + tM))^{-\alpha-1} \\ &= -\operatorname{Tr}((A + tM)^{-1}M)(\det(A + tM))^{-\alpha}\end{aligned}$$

21.

Notons $\Phi(t)M = (A + tM)^{-1}M = \Gamma(t) = (\gamma_{ij}(t))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. On sait d'après 19 que $\Gamma = \Phi M$ est dérivable en 0 et

$$\begin{aligned}\Gamma'(0) &= \Phi'(0)M \\ &= -A^{-1}MA^{-1}M \\ &= -(A^{-1}M)^2\end{aligned}$$

D'après la question 20,

$$\begin{aligned} \forall t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) &= -\text{Tr}(\Gamma(t))(\det(A + tM))^{-\alpha} \\ &= -\left(\sum_{i=1}^n \gamma_{ii}(t)\right)(\det(A + tM))^{-\alpha} \\ &= -\alpha\left(\sum_{i=1}^n \gamma_{ii}(t)\right)\varphi_\alpha(t) \end{aligned}$$

Comme les γ_{ii} sont les composantes d'une fonction dérivable, cela montre que φ_α est deux fois dérivable en 0 et

$$\begin{aligned} \varphi''_\alpha(0) &= -\alpha\left(\sum_{i=1}^n \gamma'_{ii}(0)\right)\varphi_\alpha(0) - \alpha\left(\sum_{i=1}^n \gamma_{ii}(0)\right)\varphi'_\alpha(0) \\ &= -\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \gamma'_{ii}(0)\right)}_{\text{Tr } \Gamma'(0)}(\det A)^{-\alpha} - \alpha\left(\sum_{i=1}^n \gamma_{ii}(0)\right)\underbrace{(-\text{Tr}(A^{-1}M))}_{\text{Tr } \Gamma(0)}(\det A)^{-\alpha} \\ \varphi''_\alpha(0) &= (\det A)^{-\alpha}(\text{Tr}((A^{-1}M)^2) + \alpha(\text{Tr}(A^{-1}M))^2) \end{aligned}$$

22.

D'après la question 8, on peut trouver D diagonale réelle et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{aligned} A &= QQ^T \\ M &= QDQ^T \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A^{-1}M &= (Q^T)^{-1}Q^{-1}QDQ^T \\ &= (Q^T)^{-1}DQ^T \end{aligned}$$

et donc $A^{-1}M$ est diagonalisable (en particulier semblable à une matrice symétrique réelle).

23.

On utilise les notations de la question précédente. On pose

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Tr}(A^{-1}M)^2 &= \operatorname{Tr}((Q^T)^{-1}D \underbrace{Q^T(Q^T)^{-1}DQ^T}_{=I_n}) \\
 &= \operatorname{Tr}((Q^T)^{-1}DDQ^T) \\
 &= \operatorname{Tr}((Q^T)^{-1}D^2Q^T) \\
 &= \operatorname{Tr}(D^2 \underbrace{Q^T(Q^T)^{-1}}_{=I_n}) \\
 &= \operatorname{Tr}(D^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Tr}^2(A^{-1}M) &= \operatorname{Tr}^2((Q^T)^{-1}DQ^T) \\
 &= \operatorname{Tr}^2(D \underbrace{Q^T(Q^T)^{-1}}_{=I_n}) \\
 &= \operatorname{Tr}^2(D) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2
 \end{aligned}$$

On sait que $\alpha \in]-\frac{1}{n}, +\infty[$, donc

$$\begin{aligned}
 \varphi''_{\alpha}(0) &= (\det A)^{-\alpha} (\operatorname{Tr}((A^{-1}M)^2) + \alpha (\operatorname{Tr}(A^{-1}M))^2) \\
 &\geq (\det A)^{-\alpha} (\operatorname{Tr}((A^{-1}M)^2) - \frac{1}{n} (\operatorname{Tr}(A^{-1}M))^2) \\
 &= \frac{1}{n} (\det A)^{-\alpha} (n \operatorname{Tr}((A^{-1}M)^2) - (\operatorname{Tr}(A^{-1}M))^2) \\
 &= \frac{1}{n} (\det A)^{-\alpha} (n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - (\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2) \\
 &= \frac{1}{n} (\det A)^{-\alpha} ((n-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i < j}} \lambda_i \lambda_j)
 \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses est bien connue pour $n = 2$:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

si on pose

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

on a

$$(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i < j}} x_i x_j = X^T S X$$

avec

$$S = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

On remarque que

$$S - nI_n = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1, ce qui signifie que la dimension de $\ker(S - nI_n)$ vaut $n - 1$ d'après le théorème du rang, ou encore n est valeur propre de S d'ordre de multiplicité au moins $n - 1$. On trouve la deuxième valeur propre λ en regardant la trace:

$$\begin{aligned} n(n-1) + \lambda &= \text{Tr}(S) = n(n-1) \\ \Rightarrow \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(S) = \{0, n\} \subset \mathbb{R}^+$, donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2 \\ i < j}} x_i x_j = X^T S X \geq 0$$

On peut conclure que $\varphi''_\alpha(0) \geq 0$.

24.

Comme φ_α est deux fois dérivable en 0, elle y admet un DL à l'ordre 2:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} \varphi_\alpha(0) + \varphi'_\alpha(0)t + \frac{1}{2}\varphi''_\alpha(0)t^2 + o(t^2) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\alpha}(\det A)^{-\alpha} - \text{Tr}(A^{-1}M)(\det A)^{-\alpha}t + \frac{1}{2}\varphi''_\alpha(0)t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

Ou encore:

$$\varphi_\alpha(t) - \frac{1}{\alpha}(\det A)^{-\alpha} + \text{Tr}(A^{-1}M)(\det A)^{-\alpha}t \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}\varphi''_\alpha(0)t^2 + \underbrace{o(t^2)}_{=r(t)}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que le membre de droite est du signe de $\frac{1}{2}\varphi''_\alpha(0)t^2$ au voisinage de 0. On revient à la définition de o , avec $\epsilon = \frac{1}{4}\varphi''_\alpha(0) > 0$:

$$\begin{aligned} \exists \eta > 0, \quad \forall t \in]-\eta, \eta[, \quad |r(t)| &\leq \frac{1}{4}\varphi''_\alpha(0)t^2 \\ \Rightarrow \exists \eta > 0, \quad \forall t \in]-\eta, \eta[, \quad \frac{1}{2}\varphi''_\alpha(0)t^2 + r(t) &\geq \frac{1}{2}\varphi''_\alpha(0)t^2 - \frac{1}{4}\varphi''_\alpha(0)t^2 \\ &= \frac{1}{4}\varphi''_\alpha(0)t^2 \geq 0 \end{aligned}$$