**CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023**
**MATHÉMATIQUES 1 - MP**

Pierre-Paul TACHER



## 1.

Il est clair que $E_a$ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$, donc c'est un endomorphisme. De plus $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$ montre que $E_a$ es bijectif et $(E_a)^{-1} = E_{-a}$.

## 2.

$J$ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$. On peut expliciter $J$. Soit $p = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, $a_n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
Jp &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1}\left[(X+1)^{i+1} - X^{i+1}\right] \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1}\left[(X+1-X)(\sum_{j=0}^i (X+1)^j X^{i-j})\right] \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1}(\sum_{j=0}^i (X+1)^j X^{i-j})
\end{aligned}$$

On a $\deg(X+1)^j X^{i-j} = i$, de coefficient dominant 1, donc $Jp$ est de degré $n$, de coefficient dominant $a_n \frac{n+1}{n+1} = a_n$

## 3.

Puisque $J$ conserve le degré, $(JX^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de degrés echelonnés, donc une base de $\mathbb{K}[X]$. Ce la montre que $J$ est bijectif.

## 4.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\
t &\mapsto e^{-t} t^k
\end{aligned}$$

est $C^0$ par morceaux et $e^{-t}t^k \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ montre que la fonction est intégrable en $+\infty$.

Soit $X > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^X e^{-t} t^k \,\mathrm{d}t &= \left[e^{-t}\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^X + \int_0^X e^{-t}\frac{t^{k+1}}{k+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{e^{-X}\frac{X^{k+1}}{k+1}}_{\underset{X\to+\infty}{\to} 0} + \int_0^X e^{-t}\frac{t^{k+1}}{k+1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En faisant tendre $X \to +\infty$, on a

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} I_{k+1}$$

montre par une récurrence immédiate que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k \,\mathrm{d}t = k!$$

**5.**

On peut expliciter l'action de $L$ sur la base cannonique

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{K}, \quad LX^n(x) &= -n \int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^{n-1} \,\mathrm{d}t \\
&= -n \int_0^{+\infty} e^{-t}(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i x^{n-1-i}) \,\mathrm{d}t \\
&= -n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^i \,\mathrm{d}t \\
&= -n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} i! \\
&= -n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-i)!} x^{n-1-i} \\
&= -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} \qquad (1)
\end{aligned}$$

montre que $LX^n = -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} X^i$[1] puis par linéarité

$$Lp = \sum_{i=0}^{n} a_i LX^i \in \mathbb{K}[X]$$

est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. $L$ n'est pas inversible puisque $\mathbb{K} \subset \ker L$ ($\mathbb{K}$ désignant l'espace vectoriel des polynômes constants).

**6.**

$$\begin{aligned}
(I \circ E_a)(P) &= I(P(X+a)) \\
&= P(X+a) \\
&= E_a(P) \\
&= E_a(I(P)) \\
&= (E_a \circ I)(P)
\end{aligned}$$

[1] L'expression a bien un sens pour $n = 0$ en prenant la convention qu'une somme sans termes vaut 0.

$$\begin{aligned}(D \circ E_a)(P) &= D(P(X+a)) \\ &= 1 \times P'(X+a) \\ &= P'(X+a) \\ &= E_a(P') \\ &= E_a(D(P)) \\ &= (E_a \circ D)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_b \circ E_a)(P) &= E_b(P(X+a)) \\ &= P((X+b)+a) \\ &= P(X+a+b) \\ &= P((X+a)+b) \\ &= E_a(P(X+b)) \\ &= E_a(E_b(P)) \\ &= (E_a \circ E_b)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_b \circ E_a)(P) &= E_b(P(X+a)) \\ &= P((X+b)+a) \\ &= P(X+a+b) \\ &= P((X+a)+b) \\ &= E_a(P(X+b)) \\ &= E_a(E_b(P)) \\ &= (E_a \circ E_b)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad (E_a \circ J)P(x) &= E_a(JP)(x) \\ &= \int_{x+a}^{x+a+1} p(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x}^{x+1} p(u+a)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } u = t-a\text{)} \\ &= J(P(X+a))(x) \\ &= (J \circ E_a)P(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_a \circ L)X^n &= E_a(-n!\sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!}) \\ &= -n!\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(X+a)^i}{i!} \\ &= -n!\sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{(n-j)!}a^{n-j} \\ &= -n!\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-j)!}a^{n-j} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{X^i}{i!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}(-j!) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{X^i}{i!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (LX^j) a^{n-j} \\
&= L(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j a^{n-j}) \\
&= L(X+a)^n \\
&= L(E_a X^n)
\end{aligned}$$

$I, J, E_a$ conserve le degré donc ne sont pas delta. Par contre $L$ et $D$ öe sont puisque $LX = -1$ et $DX = 1$.

**7.**

On a $I$ est shift invariant. Soit $T_1$, $T_2$ shift invariants, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
E_a \circ (\lambda T_1 + T_2) &= \lambda E_a \circ T_1 + E_a \circ T_2) \\
&= \lambda T_1 \circ E_a + T_2 \circ E_a) \\
&= (\lambda T_1 + T_2) \circ E_a
\end{aligned}$$

donc $\lambda T_1 + T_2$ est shift invariant.Puis:

$$\begin{aligned}
E_a \circ (T_1 \circ T_2) &= (E_a \circ T_1) \circ T_2 \\
&= (T_1 \circ E_a) \circ T_2 \\
&= T_1 \circ (E_a \circ T_2) \\
&= T_1 \circ (T_2 \circ E_a) \\
&= (T_1 \circ T_2) \circ E_a
\end{aligned}$$

et $T_1 \circ T_2$ est shift invariant. Les endomorphismes shift invariants constituent bien une sous algèbre.

Par contre les endomorphismes delta ne sont stables ni par addition, ni par composition comme le montre

$$LDX = L1 = 0$$

et

$$(L + D)X = 0$$

**8.**

Soit $\deg p = d \in [\![-1, +\infty[\![$. On a $\forall k \geqslant d+1, \quad D^k p = 0$, de sorte que la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k p$$

a bien un sens et définit bien un polynôme en tant que somme (finie) de polynômes.

**9.**

Les endomorphismes shift invariants formant une algèbre, et $D$ étant shift invariant, il est direct que

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad (E_a \circ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k)p &= (E_a \circ \sum_{k=0}^{d} a_k D^k)p \\ &= (\sum_{k=0}^{d} a_k D^k \circ E_a)p\end{aligned}$$

Donc $E_a \circ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \circ E_a$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est shift invariant.

**10.**

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}k!a_k &= (\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k)X^k(0) \\ &= (\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k)X^k(0) \\ &= k!b_k\end{aligned}$$

**11.**

On remarque que

$$\begin{aligned}D^k q_j(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{jk}\end{aligned}$$

Posons $\tilde{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0)D^k$. On voit déjà que

$$\begin{aligned}\tilde{T}q_k(0) &= (\sum_{j=0}^{k} Tq_j(0)D^j q_k)(0) \\ &= Tq_k(0)D^k q_k(0) \\ &= Tq_k(0)\end{aligned}$$

Les polynômes $Tq_k$ et $\tilde{T}q_k$ coincident en 0.

De plus les $q_k$ forment une base de $\mathbb{K}[X]$; tout polynômes $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit

$$p = \sum_{k=0}^{d} p^{(k)}(0)q_k$$

Cela montre que $Tp$ et $\tilde{T}p$ coincident en 0.

Supposons $T$ shift invariant. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
Tq_k(x) &= E_x(Tq_k)(0) \\
&= ((E_x \circ T)q_k)(0) \\
&= ((T \circ E_x)q_k)(0) \\
&= T(E_x q_k)(0) \\
&= \tilde{T}(E_x q_k)(0) \\
&= ((\tilde{T} \circ E_x)q_k)(0) \\
&= ((E_x \circ \tilde{T})q_k)(0) \qquad (\tilde{T} \text{ est shift invariant}) \\
&= E_x(\tilde{T}q_k)(0) \\
&= \tilde{T}q_k(x)
\end{aligned}$$

Cela montre que $Tq_k$ et $\tilde{T}q_k$ coincident, puis par linéarité, $Tp = \tilde{T}p, \quad \forall p \in \mathbb{K}[X]$, i.e. $T = \tilde{T}$.

Réciproquemment, si $T = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0)D^k$, $T$ est shift invariant d'après la question 9.

**12.**

soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré $d$. soit $T_1, T_2$ deux endomorphismes shift invariants.

$$\begin{aligned}
(T_1 \circ T_2)p &= (\sum_{i=0}^{d} T_1 q_i(0) D^i \circ \sum_{j=0}^{d} T_2 q_j(0) D^j)p \\
&= (\sum_{j=0}^{d} T_2 q_j(0) D^j \circ \sum_{i=0}^{d} T_1 q_i(0) D^i)p \\
(T_2 \circ T_1)p
\end{aligned}$$

car deux polynômes de l'endomorphisme $D$ commutent.

**13.**

$E_a$ est shift invariant, on peut écrire d'après 11:

$$\begin{aligned}
E_a &= \sum_{k=0}^{+\infty} E_a q_k(0) D^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(X+a)^k(0) D^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k
\end{aligned}$$

D'où il vient que

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad p(X+a) &= E_a p \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k p \\
&= \sum_{k=0}^{d} \frac{a^k}{k!} D^k p \\
&= \sum_{k=0}^{d} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}
\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Taylor.

**14.**

soit $q$ un polynôme obtenu par intégration à partir de $p$:

$$q = \sum_{i=0}^{d} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$$

On a

$$\begin{aligned} Jp &= E_1 q - q \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k q \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^{k-1} Dq \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^{k-1} p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} D^k p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} p^{(k)} \end{aligned}$$

**15.**

On peut s'inspirer de $(1-x)(1+x++x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$, pour $x \in \mathbb{C}$. soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré $d$.

$$\begin{aligned} (D-I) \circ (\sum_{k=0}^{+\infty} D^k)p &= (\sum_{k=0}^{+\infty} D^k) \circ (D-I)p \\ &= (\sum_{k=0}^{+\infty} D^k)(p'-p) \\ &= (\sum_{k=0}^{d-1} D^k)p' - (\sum_{k=0}^{d} D^k)p \\ &= -p \end{aligned}$$

ce qui montre que $D-I$ est inversible et

$$(D-I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} D^k$$

L'égalité 1 s'écrit

$$\begin{aligned} Lq_n &= -\sum_{i=0}^{n-1} q_i \\ \Rightarrow Lq_n(0) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$L = -\sum_{k=1}^{+\infty} D^k$$

Et on a

$$(D-I)^{-1} = -D + L$$

**16.**

D'après 11, posons $T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$

$$\begin{aligned} Tp &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k p^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k p^{(k)} \end{aligned}$$

Comme $T \neq 0$, posons $n(T) = min\{k \in \mathbb{N}, \quad a_k \neq 0\}$. On a alors:

$$Tp = \sum_{k=n(T)}^{d} a_k p^{(k)}$$

Cela montre que le degré de $Tp$ est celui de $p^{(n(T))}$, i.e.:

$$\deg Tp = \begin{cases} -1 & \text{si } p^{(n(T))} = 0 \\ d - n(T) & \text{si } p^{(n(T))} \neq 0 \Leftrightarrow d \geqslant n(T) \end{cases}$$

Autrement dit

$$\deg Tp = \max\{-1, \deg p - n(T)\}$$

**17.**

On a donc:

$$\begin{aligned} Tp = 0 &\Leftrightarrow \deg Tp = -1 \\ &\Leftrightarrow \deg p < n(T) \\ &\Leftrightarrow p \in \mathbb{K}_{\max\{n(T)-1,0\}}[X] \end{aligned}$$

**18.**

(1) $\Rightarrow$ (2) est immédiat.

Supposons $T1 \neq 0$. $T1 = Tq_o$, ce qui montre que $n(T) = \min\{k \in \mathbb{N}, \quad Tq_k(0) \neq 0\} = 0$. Ainsi $\det Tp = \max\{-1, \deg p\} = \deg p$ et on a (2) $\Rightarrow$ (3).

Si $\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad \deg Tp = \deg p$, alors $(T(q_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de degrés echelonnés de $\mathbb{K}[X]$, donc une base et $T$ inversible.(3) $\Rightarrow$ (1).

**19.**

$$\begin{aligned} E_a \circ T = T \circ E_a &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T = T^{-1} \circ T \circ E_a \\ &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T = E_a \\ &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T \circ T^{-1} = E_a \circ T^{-1} \\ &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a = E_a \circ T^{-1} \end{aligned}$$

**20.**

$T$ est shift invariant donc $\exists (\alpha_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad T = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k D^k$. Ainsi $TX = \alpha_0 X + \alpha_1$ et comme c'est une constante non nulle, on a bien $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

**21.**

$$\begin{aligned} T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k &= D \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^{k-1} \\ &= D \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+1} D^k}_{=U} \end{aligned}$$

or $U$ est shift invariant d'après 11, et inversible d'après 18 car $T1 = \alpha_1 \neq 0$. Ce qui démontre l'existence.

Si $\tilde{U} = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{\alpha}_k D^k$ vérifie $T = D \circ \tilde{U}$, alors nécessairement $\tilde{\alpha}_k = \alpha_{k+1}$ vu l'unicité de l'écriture de la question 11. L'unicité est prouvée.

Dans le cas $T = D$, $U = I$ et dans le cas $T = L$, $U = (D - I)^{-1}$.

**22.**

d'après 16 et 20, $n(T) = 1$ et $\deg Tp = \deg p - 1$ si $p \neq 0$.

$$\begin{aligned} p \in \ker T &\Leftrightarrow \deg Tp = -1 \\ &\Leftrightarrow p \in \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K} \end{aligned}$$

Si $p \neq 0$, l'égalité $Tp = \lambda p$ n'est possible pour des raisons de degré que si $\lambda = 0$. donc $\mathrm{sp}(T) = \{0\}$.

**23.**

$T_n$ est une application linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X]$, donc il s'agit bien d'un endomorphisme.

$T$ n'est pas nul si $n \geqslant 1$ car $TX \neq 0$, donc n'est pas diagonalisable car le seul endomorphisme diagonalisable dont la seule valeur propre est 0 est l'endomorphisme nul.

Par ailleurs la restriction de $T$ à $\mathbb{K}_0[X]$ et nulle, donc diagonalisable.

**24.**

Si $n \geqslant 1$, on sait déjà que $\mathrm{Im}(T_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Puis comme $\dim(\ker T_n) = \dim \mathbb{K}_0[X] = 1$, le théorème du rang nous dit que $\dim(\mathrm{Im}(T_n)) = \dim(\mathbb{K}_n[X]) - \dim(\ker T_n) = n = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$ et donc on a l'égalité $\mathrm{Im}(T_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(T_n) \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{K}_{n-1}[X] \\
&= \mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

et $T$ est surjective.

**25.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'existence et l'unicité de $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

$Q$ étant surjective, d'après 24, il existe $q_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Qq_n = q_{n-1}$. De plus d'après 22, $\deg q_n = \deg q_{n-1} + 1 = n - 1 + 1 = n$. On peut choisir le coeffcient constant de $q_n$ nul, quitte à remplacer $q_n$ par $q_n - q_n(0)$, car $\ker Q = \mathbb{K}$.

Soit maintenant $\tilde{q}_n$ un autre polynôme de degré $n$, de coefficient constant nul, vérifiant $Q\tilde{q}_n = q_{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned}
Q(q_n - \tilde{q}_n) = 0 &\Leftrightarrow q_n - \tilde{q}_n \in \ker Q \\
&\Leftrightarrow q_n - \tilde{q}_n \in \mathbb{K}_0[X] \\
&\Leftrightarrow q_n = \tilde{q}_n \qquad (\text{car } q_n(0) = \tilde{q}_n(0) = 0)
\end{aligned}$$

Ce qui démontre l'unicité.

On a bien démontré par récurrence l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant:

- i $q_0 = 1$
- ii $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n(0) = 0$
- iii $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg q_n = n$
- iv $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Qq_n = q_{n-1}$

**26.**

$$\begin{aligned}
q_n(x+y) &= \frac{1}{n!}(x+y)^n \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} n! \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y)
\end{aligned}$$

**27.**

On peut déjà remarquer que comme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg q_n = n$, $(q_n)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, un nombre arbitraire. Soit $Q$ l'unique endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par son action sur cette base:

$$\begin{gathered} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Qq_n = q_{n-1} \\ Q(q_0) = Q(1) = \alpha \end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
(Q \circ E_a)q_n &= Q(q_n(X+a)) \\
&= Q \sum_{k=0}^{n} q_k(X) q_{n-k}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(a) Qq_k(X) \\
&= q_n(a)Qq_0 + \sum_{k=1}^{n} q_{n-k}(a) Qq_k(X) \\
&= \frac{a^n}{n!}\alpha + \sum_{k=1}^{n} q_{n-k}(a) q_{k-1}(X) \\
&= \frac{a^n}{n!}\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-1-k}(a) q_k(X) \\
&= \frac{a^n}{n!}\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-1-k}(a) q_k(X) \\
&= \frac{a^n}{n!}\alpha + q_{n-1}(X+a) \\
&= \frac{a^n}{n!}\alpha + (Qq_n)(X+a) \\
&= \frac{a^n}{n!}\alpha + (E_a \circ Q)q_n
\end{aligned}$$

Cela montre clairement que

$$\begin{aligned} Q \text{ est shift invariant } &\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (E_a \circ Q)q_n = (Q \circ E_a)q_n \\ &\Leftrightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

On a montré l'existence et l'unicité d'un endomorphisme shift invariant $Q$ qui a pour suite associée $(q_n)$. De plus cet endomorphisme est delta car

$$Qq_1 = Q(\underbrace{a}_{\neq 0} X + b) = aQX + b \underbrace{Q1}_{=0} = aQX \Rightarrow QX = \frac{1}{a} \in \mathbb{K}^*$$

**28.**

$(q_0, q_1, \dots, q_n)$ est une famille de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ polynômes de degrés échelonnés, donc une base.

**29.**

La matrice de $Q_n$ dans la base $(q_0, q_1, \dots, q_n)$ est

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Tr} P = \det P = 0$, et le polynôme caractéristique vaut:

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \left.\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -X & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -X \end{vmatrix}\quad\right\} \text{taille } n+1 \\ &= -X \left.\begin{vmatrix} -X & 1 & & 0 \\ 0 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -X \end{vmatrix}\quad\right\} \text{taille } n \\ &= (-1)^{n+1} X^{n+1} \end{aligned}$$

où on a réitéré un développement suivant la première colonne.

**30.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{aligned} Dq_n &= n\frac{X^{n-1}}{n!} \\ &= \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= q_{n-1} \end{aligned}$$

**31.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{aligned} (E_1 - I)q_n &= q_n(X+1) - q_n \\ &= \frac{(X+1)X\dots(X-n+2)}{n!} - \frac{X\dots(X-n+2)(X-n+1)}{n!} \\ &= (X+1-X+n-1)\frac{X\dots(X-n+2)}{n!} \\ &= n\frac{X\dots(X-(n-1)+1)}{n!} \\ &= \frac{X\dots(X-(n-1)+1)}{(n-1)!} \\ &= q_{n-1} \end{aligned}$$

**32.**

Il est naturel d'écrire $p$ dams la base des $q_i$. Posons $p = a_0 + a_1 q_1 + \cdots + a_n q_n$. Alors, $\forall k \leqslant n$:

$$\begin{aligned} Qp &= a_1 + a_2 q_1 + \cdots + a_n q_{n-1} \\ Q^2 p &= a_2 + a_3 q_1 + \cdots + a_n q_{n-2} \\ &\vdots \\ Q^k p &= a_k + a_{k+1} q_1 + \cdots + a_n q_{n-k} \end{aligned}$$

De plus , $\forall k > n$, on a $Q^k p = 0$. On montré que l'écriture proposée a bien un sens et

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} Q^k p(0) q_k$$

**33.**

C'est un copier-coller de la question 11, en remplaçant $D$ par $Q$, et la base des $\frac{X^i}{i!}$ par la base des $q_i$ associée à $Q$:

On remarque que

$$\begin{aligned} Q^k q_j(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{jk} \end{aligned}$$

Posons $\tilde{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} T q_k(0) Q^k$. On voit déjà que

$$\begin{aligned} \tilde{T} q_k(0) &= (\sum_{j=0}^{k} T q_j(0) D^j q_k)(0) \\ &= T q_k(0) D^k q_k(0) \\ &= T q_k(0) \end{aligned}$$

Les polynômes $Tq_k$ et $\tilde{T} q_k$ coincident en 0.

De plus les $q_k$ forment une base de $\mathbb{K}[X]$; tout polynômes $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit

$$p = \sum_{k=0}^{d} p^{(k)}(0) q_k$$

Cela montre que $Tp$ et $\tilde{T} p$ coincident en 0.

Supposons $T$ shift invariant. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} T q_k(x) &= E_x(T q_k)(0) \\ &= ((E_x \circ T) q_k)(0) \\ &= ((T \circ E_x) q_k)(0) \\ &= T(E_x q_k)(0) \\ &= \tilde{T}(E_x q_k)(0) \\ &= ((\tilde{T} \circ E_x) q_k)(0) \\ &= ((E_x \circ \tilde{T}) q_k)(0) \qquad (\tilde{T} \text{ est shift invariant}) \\ &= E_x(\tilde{T} q_k)(0) \\ &= \tilde{T} q_k(x) \end{aligned}$$

Cela montre que $Tq_k$ et $\tilde{T}q_k$ coincident, puis par linéarité, $Tp = \tilde{T}p, \quad \forall p \in \mathbb{K}[X]$, i.e. $T = \tilde{T}$.
Réciproquemment, si $T = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0)D^k$, $T$ est shift invariant d'après la question 9.

**34.**

On prend donc $Q = E_1 - 1$, de sorte que

$$q_n = \frac{X \dots (X-n+2)(X-n+1)}{n!}$$

On a:

$$\begin{aligned} Dq_k(0) &= \text{coeff. de } X \text{ dans } q_k \\ &= \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}(k-1)! \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

On décompose l'opérateur de dérivation:

$$\begin{aligned} D &= \sum_0^{+\infty} Dq_k(0)Q^k \\ &= \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} Q^k \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} Qp &= p(X+1) - p \\ Q^2p &= p(X+2) - p(X+1) - (p(X+1) - p) \\ &= p(X+2) - 2p(X+1) + p \\ Q^3p &= [p(X+3) - 2p(X+2) + p(X+1)] - [(p(X+2) - 2p(X+1) + p] \\ &= p(X+3) - 3p(X+2) + 3p(X+1) - p \end{aligned}$$

Soit $p = a_0 + a_1q_1 + \dots + a_nq_n, \quad a_n \neq 0$. Il est direct que

$$\forall k > n = \deg p, \quad Q^kp = 0$$

Montrons que $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad Q^kp = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}p(X+j)$.
Déjà, $Q^0p = Ip = p$. Soit $k > 0$ tel que $Q^kp = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}p(X+j)$

Alors,

$$
\begin{aligned}
Q^{k+1}p &= QQ^kp \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}p(X+j+1) - \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}p(X+j) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k-j+1}\binom{k}{j-1}p(X+j) - \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}p(X+j) \\
&= p(X+k+1) + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j+1}\binom{k}{j-1}p(X+j) - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}p(X+j) - (-1)^kp \\
&= p(X+k+1) + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j+1}\left[\underbrace{\binom{k}{j-1}+\binom{k}{j}}_{\binom{k+1}{j}}\right]p(X+j) - (-1)^kp \\
Q^{k+1}p &= \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{k-j+1}\binom{k+1}{j}p(X+j)
\end{aligned}
$$

On a donc finalement

$$
\begin{aligned}
p' &= Dp \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}Q^kp \\
&= \sum_{k=0}^{d}\frac{(-1)^{k-1}}{k}Q^kp \\
&= \sum_{k=0}^{d}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}p(X+j)p \\
p' &= \sum_{k=0}^{d}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{1-j}\binom{k}{j}p(X+j)
\end{aligned}
$$

**35.**

On a

$$
\begin{aligned}
D(Xp) &= DXp + XDp \\
&= p + XDp
\end{aligned}
$$

Montrons par récurrence sur $n$, la propriété:

$$\forall T = \sum_{k=0}^{+\infty}a_kD^k \quad \forall p \in \mathbb{K}_n[X], \quad T'p = \sum_{k=1}^{+\infty}ka_kD^{k-1}p$$

C'est direct pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} T(X1) &= a_1 + a_0 X \\ &= 1 \times a_1 D^0(1) + X a_0 \\ &= 1 \times a_1 D^0(1) + XT(1) \end{aligned}$$

Supposons la propriété vraie pour un certain $d - 1 \leqslant 0$. Soit $p \in \mathbb{K}_d[X]$.

$$\begin{aligned} T(XP) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k(Xp) \\ &= \sum_{k=0}^{d+1} a_k D^k(Xp) \\ &= a_0 Xp + \sum_{k=1}^{d+1} a_k D^{k-1} D(Xp) \\ &= a_0 Xp + \sum_{k=1}^{d+1} a_k D^{k-1}(p + XDp) \\ &= \sum_{k=1}^{d+1} a_k D^{k-1} p + a_0 Xp + \sum_{k=1}^{d+1} a_k D^{k-1}(XDp) \end{aligned} \tag{2}$$

On peut maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme $Dp \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ et à l'endomorphisme $T_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k D^{k-1}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d+1} a_k D^{k-1}(XDp) &= \sum_{k=2}^{d+1} (k-1) a_k D^{k-2}(Dp) + X \sum_{k=1}^{d+1} a_k D^{k-1}(Dp) \\ &= \sum_{k=2}^{d+1} (k-1) a_k D^{k-1} p + X \sum_{k=1}^{d} a_k D^{k-1}(Dp) \\ &= \sum_{k=1}^{d+1} (k-1) a_k D^{k-1} p + X \sum_{k=1}^{d} a_k D^k p \end{aligned}$$

On revient à l'équation 2:

$$\begin{aligned} T(XP) &= \sum_{k=1}^{d+1} a_k D^{k-1} p + a_0 Xp + \sum_{k=1}^{d+1} (k-1) a_k D^{k-1} p + X \sum_{k=1}^{d} a_k D^k p \\ &= \sum_{k=1}^{d+1} k a_k D^{k-1} p + X \sum_{k=0}^{d} a_k D^k p \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k D^{k-1} p + XTp \end{aligned}$$

**36.**

Direct d'après l'équivalence de 11 et la question 35.

**37.**

Puisque $T$ est shift invariant, $T'$ l'est d'après ce qui précède. puis

$$T'1 = 1 \times a_1 \neq 0 \qquad \text{(d'après 20)}$$

montre que $T'$ est inversible d'après 18.

**38.**

Soit $p \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned}(S' \circ T - S \circ T')p &= S(XTp) - XS(Tp) + (S(T(Xp)) - S(XTp)) \\ &= -XS(Tp) + (S(T(Xp)) \\ &= (S \circ T)'p\end{aligned}$$

**39.**

$$\begin{aligned}Q' &= (D \circ U)' \\ &= \underbrace{D'}_{=I} \circ U + D \circ U' \\ &= U + D \circ U'\end{aligned}$$

donc,

$$(Q' \circ U^{-n-1})X^n = U^{-n}X^n + DU'U^{-n-1}X^n$$

Or on sait que $D$ commutent avec les endomorphismes shift invariants $U'$ et $U^{-n-1}$,

$$\begin{aligned}(Q' \circ U^{-n-1})X^n &= U^{-n}X^n + U'U^{-n-1}DX^n \\ &= U^{-n}X^n + nU'U^{-n-1}X^{n-1} \qquad (3)\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, par une récurrence imédiate,

$$(U^n)' = nU'U^{n-1}$$

puis:

$$\begin{aligned}& (U^n \circ U^{-n}) = I \\ \Rightarrow \quad & (U^n \circ U^{-n})' = I' \\ \Leftrightarrow \quad & (U^n)'U^{-n} + U^n(U^{-n})' = \\ \Leftrightarrow \quad & (U^{-n})' = -U^{-n}(U^n)'U^{-n}\end{aligned}$$

ainsi:

$$\begin{aligned}(U^{-n})' &= -nU^{-n}U'U^{n-1}U^{-n} \\ (U^{-n})' &= -nU'U^{-n-1}\end{aligned}$$

car les endomorphismes shift invariants commutent.

On reprend le calcul de 3, et on applique de nouveau la définition de la dérivation de Pincherle:

$$\begin{aligned}(Q' \circ U^{-n-1})X^n &= U^{-n}X^n + nU'U^{-n-1}X^{n-1}\\ &= U^{-n}X^n - (U^{-n})'X^{n-1}\\ &= U^{-n}X^n - (U^{-n}XX^{n-1} - XU^{-n}X^{n-1})\\ &= U^{-n}X^n - U^{-n}X^n + XU^{-n}X^{n-1}\\ &= XU^{-n}X^{n-1}\end{aligned}$$

**40.**

On voit que

$$\begin{aligned}QQ'U^{-n-1}X^n &= DUQ'U^{-n-1}X^n\\ &= Q'UU^{-n-1}DX^n\\ QQ'U^{-n-1}X^n &= nQ'U^{-n}X^{n-1}\\ \Rightarrow Q(\underbrace{\frac{1}{n!}Q'U^{-n-1}X^n}_{\tilde{q}_n}) &= \frac{1}{(n-1)!}Q'U^{-n}X^{n-1}\end{aligned}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Q\tilde{q}_n = \tilde{q}_{n-1}$, puis on vérifie aisément que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tilde{q}_n(0) = 0$, et aussi

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0 &= Q'U^{-1}1\\ &= Q'\frac{1}{QX}\\ &= \frac{1}{QX}Q'1\\ &= \frac{1}{QX}QX\\ &= 1\end{aligned}$$

Par unicite de la suite associée,

$$\begin{aligned}q_n &= \tilde{q}_n\\ &= \frac{1}{n!}Q'U^{-n-1}X^n\end{aligned}$$

On a donc bien

$$n!q_n = XU^{-n}X^{n-1}$$

qu'on peut écrire encore:

$$\begin{aligned}nq_n &= X\frac{1}{(n-1)!}U^{-n}X^{n-1}\\ &= X\frac{1}{(n-1)!}U^{-n}X^{n-1}\\ &= X(Q')^{-1}q_{n-1}\end{aligned}$$

**41.**

On a vu en 21 que $L = D(D-I)^{-1}$. Comme deux endomorphismes shift invariants commutent on a aussi $L = (D-I)^{-1}D \Leftrightarrow (D-I)L = D$. En appliquant à $l_n$ on obtient:

$$\begin{aligned}(D-I)Ll_n = Dl_n &\Leftrightarrow (D-I)l_{n-1} = l_n' \\ &\Leftrightarrow l_{n-1}' - l_{n-1} = l_n'\end{aligned}$$

On peut prendre la dérivé de Pincherle pour avoir:

$$\begin{aligned}(D-I)L = D &\Rightarrow \underbrace{(D-I)'}_{=I}L + (D-I)L' = D' \\ &\Leftrightarrow L + (D-I)L' = I \\ &\Leftrightarrow L' = (D-I)^{-1}(I-L) \\ &\Leftrightarrow L' = -(D-I)^{-2} \qquad \text{d'après 15} \\ &\Leftrightarrow L'^{-1} = -(D-I)^2\end{aligned}$$

On applique le résultat de 40:

$$\begin{aligned}&nl_n = XL'^{-1}l_{n-1} \\ \Leftrightarrow &nl_n = X(l_{n-1}'' - 2l_{n-1}' + l_{n-1}) \\ \Leftrightarrow &nl_n = X(l_{n-1}'' - l_{n-1}' + l_{n-1} - l'n-1) \\ \Leftrightarrow &nl_n = X(l_n'' - l_n')\end{aligned}$$

On va montrer:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad l_n(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{k!}$$

On sait que $L(-X) = 1 = l_0$, donc $l_1 = -X$ et la propriété est vraie au rang 1. Supposons la propriété vraie pour l'entier $n-1 \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}l_n' &= l_{n-1}' - l_{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \frac{X^k}{(k)!} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{k!} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} (\underbrace{\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}_{=\binom{n}{k}}) \frac{X^k}{(k)!} - (-1)^n \frac{X^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{X^k}{k!}\end{aligned}$$

Sachant que $l_n(0) = 0$, on peut intégrer pour obtenir:

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{X^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} \frac{X^k}{k!} \end{aligned}$$

qui permet de conclure.

**42.**

La suite $(q_n)$ étant une base de $\mathbb{K}[X]$, on sait qu'il existe un unique endomorphisme vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Tq_n = \frac{X^n}{n!}$$

D'autre part celui ci est inversible puisqu'il transforme une base en une base.

**43.**

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (T \circ Q \circ T^{-1}) \frac{X^n}{n!} &= (T \circ Q) q_n \\ &= T q_{n-1} \\ &= \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= D \frac{X^n}{n!} \end{aligned}$$

On vérifie aussi d'après 22 que

$$\begin{aligned} (T \circ Q \circ T^{-1})1 &= (T \circ Q)1 \\ &= 0 \\ &= D1 \end{aligned}$$

Donc les endomorphisme $D$ et $T \circ Q \circ T^{-1}$ coïncident sur une base, i.e. ils sont égaux.

**44.**

$W$ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même, qui conserve le degré donc il n'y pas de difficulté à montrer que c'est une bijection.

d'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} W^{-1} : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ p &\mapsto p(\frac{1}{\alpha} X) \end{aligned}$$

**45.**

$$\begin{aligned} P &= W \circ L \circ W^{-1} \\ &= W \circ D \circ (D - I)^{-1} \circ W^{-1} \\ &= W \circ D \circ (W \circ (D - I))^{-1} \end{aligned}$$

On remarque que:

$$\begin{aligned} WDX^n &= nWX^{n-1} \\ &= n\alpha^{n-1}X^{n-1} \\ &= \frac{1}{\alpha}DWX^n \end{aligned}$$

et donc $WD = \frac{1}{\alpha}DW$, puis

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\alpha}D \circ W \circ ((\frac{1}{\alpha}D - I)W)^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha}D \circ W \circ W^{-1}(\frac{1}{\alpha}D - I)^{-1} \\ P &= \frac{1}{\alpha}D \circ (\frac{1}{\alpha}D - I)^{-1} \end{aligned}$$

**46.**

$P$ est shift invariant car les endomorphismes shit invariants forment une algèbre, puis

$$\begin{aligned} PX &= WLW^{-1}X \\ &= WL\frac{1}{\alpha}X \\ &= \frac{1}{\alpha}WLX \\ &= -\frac{1}{\alpha}W1 \\ &= -\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}^* \end{aligned}$$

montre que $P$ est delta.

puis l'égalité pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} Pp_n &= WLW^{-1}l_n(\alpha X) \\ &= WLl_n(X) \\ &= Wl_{n-1}(X) \\ &= l_{n-1}(\alpha X) \\ Pp_n &= p_{n-1} \end{aligned}$$

ainsi que les autres vérifications triviales, ajoutées à l'unicité montrent que la suite de polynômes associées à $P$ est bien $p_n = l_n(\alpha X)$.

**47.**

$$\begin{aligned} L(L-I)^{-1} &= L((D-I)^{-1})^{-1} \\ &= L(D-I) \\ &= LD - L \\ &= D \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\alpha}L(L-I)^{-1} \circ (\frac{1}{\alpha}L(L-I)^{-1} - I)^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha}L \circ [(\frac{1}{\alpha}L(L-I)^{-1} - I)(L-I)]^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha}L \circ (\frac{1}{\alpha}L - L + I)^{-1} \\
&= L \circ (L - \alpha L + \alpha I)^{-1}
\end{aligned}$$

**48.**

D'après 43, on a $D = TLT^{-1}$. donc:

$$\begin{aligned}
Q &= TPT^{-1} \\
&= TL(L-\alpha L+\alpha I)^{-1}T^{-1} \\
&= TLT^{-1}T(L-\alpha L+\alpha I)^{-1}T^{-1} \\
&= D[T(L-\alpha L+\alpha I)T^{-1}]^{-1} \\
&= D[(1-\alpha)TLT^{-1}+\alpha I]^{-1} \\
&= D((1-\alpha)D+\alpha I)^{-1}
\end{aligned}$$

$Q$ est shift invariant, puis $Q$ est delta car

$$\begin{aligned}
QX &= TPT^{-1}X \\
&= -TPX \\
&= T\frac{1}{\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}^*
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&((1-\alpha)D+\alpha I)Qr_n = Dr_n \\
\Leftrightarrow &((1-\alpha)D+\alpha I)r_{n-1} = r'_n \\
\Leftrightarrow &(1-\alpha)r'_{n-1} + \alpha r_{n-1} = r'_n
\end{aligned}$$

On va montrer par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}$$

On a vu que $r_1 = \alpha X$ et la propriété est vraie au rang 1. Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $n-1 \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
r_n' &= (1-\alpha)\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\alpha^k(1-\alpha)^{n-1-k}\frac{X^{k-1}}{(k-1)!} + \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\alpha^k(1-\alpha)^{n-1-k}\frac{X^k}{k!}\\
&= (1-\alpha)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\alpha^{k+1}(1-\alpha)^{n-2-k}\frac{X^k}{k!} + \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\alpha^k(1-\alpha)^{n-1-k}\frac{X^k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\alpha^{k+1}(1-\alpha)^{n-1-k}\frac{X^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\alpha^{k+1}(1-\alpha)^{n-1-k}\frac{X^k}{k!}\\
&= \alpha(1-\alpha)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2}\left[\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right]\alpha^{k+1}(1-\alpha)^{n-1-k}\frac{X^k}{k!} + \alpha^n\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\alpha^{k+1}(1-\alpha)^{n-1-k}\frac{X^k}{k!}
\end{aligned}$$

On intègre, sachant que $r_n(0)=0$,

$$\begin{aligned}
r_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\alpha^{k+1}(1-\alpha)^{n-1-k}\frac{X^{k+1}}{(k+1)!}\\
r_n &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\alpha^{k}(1-\alpha)^{n-k}\frac{X^{k}}{k!}
\end{aligned}$$

qui est bien la formule que l'on voulait obtenir.

**49.**

Il est clair que $r_n = Tp_n$ car

$$\begin{aligned}
QTp_n &= TPT^{-1}Tp_n\\
&= TPp_n\\
&= Tp_{n-1}
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer $T^{-1}$ à la formule de la question précédente:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad l_n(\alpha X) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}l_k$$